行列式

陈小川

目录

1 行列式的性质

1.1 行列式的定义

对于 n 个 n 维向量 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$，行列式就是一种映射 $D: F^{n\times n} \to F$，其中数域 F 一般为实数域 R

对于行列式映射 D，$\forall \alpha_i, \beta_i \in F^n$，$\forall \lambda \in F$，有以下规则：

(1) $D(\alpha_1, \cdots, \lambda\alpha_i, \cdots, \alpha_n) = \lambda D(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$

(2) $D(\alpha_1, \cdots, \alpha_i + \beta_i, \cdots, \alpha_n) = D(\alpha_1, \cdots, \alpha_i, \cdots, \alpha_n) + D(\alpha_1, \cdots, \beta_i, \cdots, \alpha_n)$

(3) $D(\alpha_1, \cdots, \alpha_i, \cdots, \alpha_j, \cdots, \alpha_n) = -D(\alpha_1, \cdots, \alpha_j, \cdots, \alpha_i, \cdots, \alpha_n)$

(4) $D(e_1, \cdots, e_n) = 1$

1.2 行列式的展开式

定义余子式 M_{ij}：在 n 阶行列式中去掉 a_{ij} 所在行列的所有元素得到的 n-1 阶行列式

定义代数余子式：$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

则有：$D = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj} = a_{1j}A_{1j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \quad D = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik} = a_{i1}A_{i1} + \cdots + a_{in}A_{in}, \forall i, j = 1, \cdots, n$

引入 $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & j = i \\ 0 & j \neq i \end{cases}$，发现：$\sum\limits_{k=1}^{n} a_{kj}A_{ki} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{jk}A_{ik} = \delta_{ij}D$

1.3 行列式的简单性质

(1) 对于初等矩阵，有 $D(E_i(c)) = c \quad D(E_{ij}(c)) = 1 \quad D(E_{ij}) = -1$，以及 $|AP_1 \cdots P_k| = |A||P_1| \cdots |P_k|$

(2) $|A| \neq 0 \Longleftrightarrow$A 满秩 $\Longleftrightarrow \exists A^{-1}$

(3) $|A| = |A^{\intercal}|$

(4) $|AB| = |A| \cdot |B| \quad \begin{vmatrix} A & O \\ C & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & C \\ O & B \end{vmatrix} = |A| \cdot |B|$

(5) 上（下）三角矩阵 $U(L) = (u_{ij})_{n\times n}$ 满足 $|U| = \prod\limits_{i=1}^{n} u_{ii}$

1.4 行列式的进阶性质

(1) 记 $A^*=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$，称为矩阵 A 的**伴随矩阵**，则有 $AA^*=A^*A=|A|E$

(2) Hamilton-Cayley 定理：$A\in F_{n\times n}$，$\exists\lambda, f: F\to F\ s.t.\ f(\lambda)=|\lambda E-A|=0$，则 $f(A)=0$
（事实上，λ 就是 A 的特征值，f 就是 A 的特征多项式）

(3) 范德蒙行列式：$V_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod\limits_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)$

(4) Cramer 法则：设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，线性方程组 AX=b 的系数行列式 $|A|\neq 0$，则方程组有唯一解 $x_j=\frac{D_j}{D}$

其中 $D=|A|$，$D_j=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

(5) 拉普拉斯定理：$D=\sum\limits_{i=1}^{\binom{n}{k}}S_i\Lambda_i$

这么一个式子，就把拉普拉斯讲完，一觇之未免偏狭，然而这种偏见的傲慢，更远在知性的傲慢之上，我们不妨仔细祛魅，在不惧怕其复杂形式的前提下，把握拉普拉斯的本质。

定义 k 阶子式：矩阵 A 中取 k 行、k 列，位于这 k 行 k 列交点的 k^2 个元素按照原来的相对位置组成的 k 阶方阵，其行列式 S 称为 A 的一个 k 阶子式

定义 k 阶余子式：A 中去掉上述元素所在的 k 行 k 列，余下的元素按照原来的相对位置组成的 n-k 阶方阵，其行列式 M 称为 k 阶余子式

定义 k 阶代数余子式：设上述余子式的各行各列分别位于 A 中第 $i_1\cdots i_k$ 行以及第 $j_1\cdots j_k$ 列，则称 $\Lambda=(-1)^{i_1+\cdots+i_k+j_1+\cdots+j_k}\cdot M$ 为 k 阶代数余子式

这样，我们讲清楚了拉普拉斯定理的定义，至于它的证明，目前我自己还没有学会较简单的方法，因此很遗憾此处不能详细展开，但是请大家首先依靠理解和记忆的方式掌握拉普拉斯定理的叙述本身

2 行列式的计算

2.1 化三角阵

计算行列式 $D_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & a_1+b_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & a_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix}$

2.2 连加

计算行列式 $D_n = \begin{vmatrix} x_1-m & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2-m & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n-m \end{vmatrix}$

2.3 降阶

计算行列式函数 $D_n(x) = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_0 & a_1 & a2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \end{vmatrix}$

2.4 升阶

计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$

2.5 因式分解

计算 $D = \begin{vmatrix} a_1-b_1 & \cdots & a_1-b_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n-b_1 & \cdots & a_n-b_n \end{vmatrix}$，注意分类讨论 n=1,n=2 和 n>2

2.6 递推

计算 n 阶三对角行列式 $D = \begin{vmatrix} a & b & & & & \\ c & a & b & & & \\ & c & a & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & a & b \\ & & & & c & a \end{vmatrix}_{n\times n}$，其中 $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$

2.7 范德蒙行列式

证明 $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^2 \end{vmatrix} = \left(\sum_{i=1}^n x_i\right) \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} (x_j - x_i)$

2.8 部分展开

证明 $D = \begin{vmatrix} a & c & c & \cdots & c \\ b & a & c & \cdots & c \\ b & b & a & \cdots & c \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix} = \begin{cases} \dfrac{b(a-c)^n - c(a-b)^n}{b-c} & b \neq c \\ (a+(n-1)b)\cdot(a-b)^{n-1} & b = c \end{cases}$

2.9 参数法

计算行列式 $D = \begin{vmatrix} x_1 & a & \cdots & a \\ b & x_2 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \cdots & x_n \end{vmatrix}$

2.10 打洞

设 $A \in F^{m\times n}, B \in F^{n\times m}, \lambda \in F$，证明 $\lambda^n \cdot |\lambda I_m - AB| = \lambda^m \cdot |\lambda I_n - AB|$

2.11 $|E_n - AB| = |E_m - BA|$ 的应用

已知矩阵 $A_{3\times 2}, B_{2\times 3}$ 满足 $AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$，求 $|BA|$