线性代数 I（H）期末复习

基础版（5-6 章）

吴一航

祝大家考出理想成绩 O(∩_∩)O

〇、写在前面

0.1　阅读指南

本期末复习是期中复习的延续，内容涉及教材 5-6 章。同样的，这份资料大部分内容相当于带着大家一起回顾教材，总结了重要的知识。当然也穿插了一些习题和延伸的内容，加深理解。建议阅读时准备好教材，回忆所学内容。

考虑到部分同学可能出现的情况，我思考了一下，还是在期末复习中给出了一些重点概述与补天建议（虽然一直在说尽量避免这种情况），顺便按照本人对该课程粗浅的理解和不知道敏不敏锐的直觉划了一些重点，希望对大家有所帮助。

0.2　常见问题

①考试范围：教材**第一章 1.8 节，2-7 章除去星号章节、小字部分和几何内容（如 6.3 和 7.2 节）**；

②历年卷：蓝田由古老的历年卷，可以做心理安慰使用，顺带过一些关键点。时间更近一些的历年卷可能很难找到，去年我本来想打一份的，结果卷子太简单了我觉得没有太大必要留下来所以就没有打了。

0.3　考情综述

①请同学们不要关心有关于试题难度的问题，这不是随我们的意志能改变的东西，你难我难大家难，但是肯定可以保证通过考试是不难的，然后教材习题基本完成考试也应当也是很亲切的；

②试卷计算题和证明题大约五五开，其中试卷第九题（最后一题，20 分，其余 8 题基本上每题 10 分）一定是四个说法判断正误，给出理由/反例。这一类题型对于基本概念以及常用结论的运用要求比较高。

③补天请注意：如果你真的没时间了，注意一定要学会的内容是：<u>所有的基本概念以及高斯消元法、线性相关性、施密特正交化、线性映射在基下的表示、矩阵乘法、矩阵求逆、**P200 例 3**、实对称矩阵对角化、二次型标准形的求解</u>。可以发现，列出的基本都是计算题，所以务必看教材相关例题学习解决上述问题的方法，其他证明题请务必把你所有知道的相关内容写上去！

④关于考试重点：我想上面补天内容已经表明基本必考的计算题的可能位置，其他内容以及证明题没有什么重点可言，只能说这本书围绕线性空间和线性映射在前六章解决了线性方程组解的结构问题，这是本书核心。

一、行列式

1.1　本章重点概述

本章属于考察不稳定章节，例如去年没有单独考察，而 2019 年则直接考察行列式计算。相对于线性代数（甲）课程而言，在线性代数 I（H）中对于行列式的重视程度并不是特别高，因此对于希望通过考试或者拿到一个相对满意成绩的同学，本章内容可以不做重点复习，但基本内容必须掌握，想要获得高分的同学还是需要多加练习，但是也不能剑走偏锋。

1.2　行列式的定义与基本性质

补天小贴士：逆序数定义是拓展内容，补天同学可以略过，但是公理化定义和递归式定义（即行列式按一列（行）展开）需要掌握。此外，下面给出的基本性质都应当尽量掌握。

1. 公理化定义

公理化定义即本教材中使用的定义，定义见教材 P169 定义 5.1，即线性性、反对称性以及规范性，此处不再赘述。理解公理化定义时，**实际上我们可以用 *n* 维空间的体积定义来类比**，如果希望详细了解，**可以参看 B 站《线性代数的本质》**。

本教材从此展开了行列式的性质的推导，总结如下：

①关于初等矩阵的行列式：见教材 P171 中间；并且注意其转置行列式不变，这是一些证明的基础；

②行列式有两列元素成比例，则行列式为 0，矩阵初等行列变换不改变行列式；

③综合以上以及可逆矩阵可以拆成初等矩阵乘积，可以得到：

I. 矩阵可逆充分必要条件是其行列式不为 0，即不可逆对应行列式为 0；

II. 矩阵与其转置的行列式相等（由此可得奇数阶反对称矩阵不可逆）；

III. 矩阵乘积的行列式等于矩阵行列式的乘积（因此矩阵与其逆矩阵行列式乘积为 1，还有看到行列式的乘积不用慌，先用矩阵乘法再求行列式就行啦）

④上（下）三角行列式等于对角线上元素乘积；

⑤若 A、B 为方阵，$\begin{vmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & 0 \\ C & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & D \\ 0 & B \end{vmatrix} = |A||B|$。$\begin{vmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{vmatrix}$等不是，应当先交换行/列（行列式乘以-1）使其变为前述矩阵形式再计算。（证明时需要构造特殊矩阵相乘，

2. 逆序数定义（无需掌握，有兴趣可以参考一下，具体的也可以参考冯涛老师导师的教材）

定义 *n* 个不同的自然数的一个全排列称为一个 *n* 元排列。

例如 3 个自然数 1，2，3 组成的 3 元排列为 123，132，213，231，312，321

给定 *n* 个不同的自然数，它们形成的全排列有 *n*!个。因此对于给定的 *n* 个不同的自然数，*n* 元排列的总数是 *n*!。

4 元排列 2341 中，2 与 3 形成的数对 23 小的数在前，大的数在后，此时称这一对数构成一个**顺序**；而 2 与 1 形成的数对 21，大的数在前，小的数在后，此时称这一对数构成一个**逆序**。排列 234I 中，构成逆序的数对有 21，31，41，共 3 对，此时我们称排列 2341 的**逆序数**是 3，记作 *r*（2341）= 3。上述顺序，逆序，逆序数的概念也适用于任一 *n* 元排列。

4 元排列 2143 中，构成逆序的数对有 21，43，共 2 对。于是 *r*（2143）=2。逆序数为奇数的排列称为**奇排列**，逆序数为偶数的排列称为**偶排列**。上述例子中，2341 是奇排列，2143 是偶排列。

把排列 2341 的 3 和 1 互换位置，其余数不动，便得到排列 2143。像这样的变换称为一个**对换**，记作（3，1）。对换的概念也适用于 *n* 元排列。我们不难得到以下定理：

定理 1 对换改变 *n* 元排列的奇偶性。

定理 2 任一 *n* 元排列与排列 123…*n* 可以经过一系列对换互变，并且所作对换的次数与这个 *n* 元排列有相同的奇偶性。

由以上定义和性质得到以下行列式的定义：

定义 *n* 阶行列式（原矩阵为 *A*）

$$\mathrm{det}A = \begin{vmatrix} a_{11}\ a_{12}\ \dots\ a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\ \dots\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{n1}\ a_{n2}\ \cdots\ a_{nn} \end{vmatrix}$$

是 *n*!项的代数和，其中每一项都是位于不同行、不同列的 *n* 个元素的乘积，把这 *n* 个元素按照行指标成自然序排好位置，当列指标所成排列是偶排列时，该项带正号；奇排列时，

该项带负号。即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \overset{\text{def}}{=} \sum_{j_1 j_2,\dots,j_n} (-1)^{r(j_1 j_2 \dots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

其中$j_1 j_2 \dots j_n$是一个全排列。上式称为 n 阶行列式的完全展开式。可以代入大家最熟悉的二、三阶行列式的完全展开式（教材 P167-168（5-3）及（5-4））理解。

根据这一定义，n 阶上三角形行列式的值等于它的主对角线上 n 个元素的乘积这一性质是很容易证明的（读者有时间可以尝试，补天请略过）。

3. 递归式定义

在此首先定义**余子式**和**代数余子式**，具体参见教材 P174 定义 5.2。

行列式递归定义：

①一阶行列式定义（只有一行一列）：当 $n = 1$ 时，$A = (a_{11})$，定义$|A| = a_{11}$；

②n 阶行列式定义：当 $n \geq 2$ 时，

$$|A| = \sum_{k=1}^{n} a_{1k} A_{1k} = a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + \dots + a_{1n} A_{1n}$$

（使用列展开同理），其中 A_{ij} 即为去掉第 i 行、第 j 列得到的代数余子式。

实际上，大家有兴趣可以思考这**三个定义的等价性**，我们的教材中完成了从公理化定义到递归式定义的推导，剩下的推导可以自行完成。这里我们按照教材的思路着重讲解行列式按列（行）展开的相关内容。

定理 1（教材定理 5.1）

$$|A| = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik} = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \dots + a_{in} A_{in}, i = 1, \cdots, n$$

$$|A| = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} A_{kj} = a_{1j} A_{1j} + a_{2j} A_{2j} + \dots + a_{nj} A_{nj}, j = 1, \cdots, n$$

其中上式称为对第 i 行的展开式，如果对于求和符号有理解困难的，请务必拆开写来理解，此处你会发现我们都是提取了第 i 行的元素以及他们的代数余子式，那么很容易便可以知道这是对第 i 行的展开式，同理，下式是对第 j 列的展开式。

定理 2（教材定理 5.2）

$$\sum_{k=1}^{n} a_{jk} A_{ik} = a_{j1} A_{i1} + a_{j2} A_{i2} + \dots + a_{jn} A_{in} = 0\text{，} j \neq i$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{kj} A_{ki} = a_{1j} A_{1i} + a_{2j} A_{2i} + \dots + a_{nj} A_{ni} = 0\text{，} j \neq i$$

其含义为，我虽然按这一行（列）元素展开，但我却乘以其他行展开的代数余子式，这样得到的结果为 0.原因很简单，我不认为这是乘以其他行展开的代数余子式，其实是我这一行就等于另一行，那么这样对于这个有两行（列）相等的行列式展开就得到了上述结果。

拓展：行列式按 k 列（行）展开（不会考察，有兴趣的同学可以参考）

定理 1（Laplace 定理）在 n 阶行列式$|A|$中，取定 k 行：第 i_1，i_2，…，i_k 行（$i_1<i_2<\ldots<i_k$，且 $1\le k<n$），则这 k 行元素形成的所有 k 阶子式与它们自己的代数余子式的乘积之和等于$|A|$.

定理 2 n 阶行列式$|A|$中，取定 k 列（$1\le k<n$），则这 k 列元素形成的所有 k 阶子式与它们自己的代数余子式的乘积之和等于$|A|$。

定理证明比较繁琐，此处省略（我可能是学了苏中根的教材风格了（×））

一个拓展练习：利用拉普拉斯定理证明$\begin{vmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & 0 \\ C & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & D \\ 0 & B \end{vmatrix} = |A||B|$。

1.3 行列式的计算与高级性质

这一部分内容之前的辅学中已经有学长讲解过（对，说的就是卷卷学长那一次），我这里就狗尾续貂一下，几种基本的方法如下（高阶方法可以参看辅学群周健均学长的资料）：

①化为上三角行列式；

②拆项法：参考教材 P173 例 6 证法二；

③按一行（列）展开；

④递推法：参看教材 P178 例 3；

⑤数学归纳法：范德蒙行列式（并且一定要认得出某行列式是范德蒙行列式）。

这几种方法对应的教材例题和习题大家应当掌握，否则考试遇到大型行列式计算很难得分！（下面的例子就是血淋淋的教训）其他高阶方法这里不再列出，有兴趣的同学可以参看其他资料。这里只给两个曾经考过的题（都是试卷第一题，看起来就很玩人心态的题）：

①设有 n 阶方阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，其中 $a_{ij}=\sin(i+j)$，试求行列式$|A|$的值。

②计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_1+a_2 & a_2+a_3 & a_3+a_4 & a_4+a_5 & a_5+a_1 \\ a_1^2+a_2^2 & a_2^2+a_3^2 & a_3^2+a_4^2 & a_4^2+a_5^2 & a_5^2+a_1^2 \\ a_1^3+a_2^3 & a_2^3+a_3^3 & a_3^3+a_4^3 & a_4^3+a_5^3 & a_5^3+a_1^3 \\ a_1^4+a_2^4 & a_2^4+a_3^4 & a_3^4+a_4^4 & a_4^4+a_5^4 & a_5^4+a_1^4 \\ a_1^5+a_2^5 & a_2^5+a_3^5 & a_3^5+a_4^5 & a_4^5+a_5^5 & a_5^5+a_1^5 \end{vmatrix}$$

一些行列式的高阶性质：

①设 A、B 都是方阵且可逆，则$\begin{vmatrix} A & D \\ C & B \end{vmatrix} = |A||B-CA^{-1}D| = |B||A-DB^{-1}C|$；

②设 A，B，C，D 都是 n 阶方阵且满足 A 可逆且 $AC=CA$，则$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD-CB|$；

③$\begin{vmatrix} E_m & B \\ A & E_n \end{vmatrix} = |E_n-AB| = |E_m-BA|$；

④设 A、B 都是 n 阶方阵，$\lambda\in F$，则$|\lambda E-AB| = |\lambda E-BA|$；

⑤$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = |A+B||A-B|$。

上述性质以及其他可能的高阶性质在证明时技巧性可能较强（特别是需要构造特殊矩阵相乘），需要多加练习体会。如果时间不够可以先简略复习此内容复习其他内容。

1.4 行列式的秩

定义 1 行列式的 k 阶子式和 k 阶主子式。具体参考教材 P183 定义 5.3，简单而言 k 阶子式就是挑选 k 行 k 列交点上 k^2 个元素排成的行列式，若选择的行列的行号、列号相等，那么则为 k 阶主子式。

若矩阵存在 r 阶非零子式，但所有的 $r+1$ 阶子式都为 0，则其非零子式最高阶数就为 r，

因为 $r+1$ 阶子式都为 0，按行列式展开式可知更高阶的子式也一定为 0。

定义 2 矩阵的非零子式的最高阶数称为其行列式的秩。

定理 1 矩阵的秩为 r 当且仅当其行列式的秩也为 r。

有了行列式的秩的定义后，参考教材 P183 例 3，我们得到了一种更简便的判断线性相关性以及扩充基的方法，大家务必掌握。

除此之外，我们还应当介绍伴随矩阵及其性质：

定义 3 我们称矩阵

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11}\ A_{21} \cdots A_{n1} \\ A_{12}\ A_{22} \cdots A_{n2} \\ \cdots \\ A_{1n}\ A_{2n} \cdots A_{nn} \end{pmatrix}$$

为 A 的伴随矩阵，其中 A_{ij} 即为矩阵 A 中元素 a_{ij} 的代数余子式。要注意这里的下标排布与一般矩阵不同，是经过转置的下标。如下是伴随矩阵的性质，证明并不复杂：

①$AA^* = A^*A = |A|E$，若 A 可逆，则

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*，A^* = |A|A^{-1}，(A^*)^{-1} = \frac{1}{|A|}A$$

②$r(A^*) = \begin{cases} n, r(A) = n; \\ 1, r(A) = n-1; \\ 0, r(A) < n-1. \end{cases}$

③$|A^*| = |A|^{n-1}$（无论 A 是否可逆）

④当 A 可逆时，有$(AB)^* = B^*A^*$，$(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$，$(A^T)^* = (A^*)^T$

⑤无论 A 是否可逆，都有$(A^*)^* = |A|^{n-2}A$

以上性质证明都不复杂，可以自己尝试，基本上都是运用伴随矩阵的定义即可证明。

1.5 Cramer 法则（简单了解）

线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

的系数行列式 D 不为 0，则方程组有唯一解，且$x_j = \frac{D_j}{D}$，$j = 1, 2, \cdots, n$，其中

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} \cdots a_{1,j-1}\ b_1\ a_{1,j+1} \cdots\ a_{1n} \\ a_{21}\ \cdots a_{2,j-1}\ b_2\ a_{2,j+1} \cdots\ a_{2n} \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}\ \cdots a_{n,j-1}\ b_n\ a_{n,j+1} \cdots\ a_{nn} \end{vmatrix}$$

证明过程十分简洁，直接求逆并利用伴随矩阵得到上述结论。

Cramer 法则的直接引申出的一个定理为：对于 n 阶方阵 A，齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{0}$ 有非零解的充分必要条件为$|A| = 0$，即 $r(A) < n$。于是对于齐次线性方程组而言，判断其是否有非零解实际上就是判断其行列式是否为 0。

教材 5.4 节后面还有关于几何的介绍，建议同学们把大字部分浏览，应该是对于加深部分知识的理解有所帮助，虽然不会直接考察。

二、线性方程组解的理论

2.1 本章重点概述

本章是全书 1-5 章的终极目标（直接回答了第一章中提出的线性方程组解的结构问题），之前所学章节在本章得到综合运用，因此本章内容如果都能理解清楚，那么本教材的主干思路应当是基本清晰的。

本章 6.1-6.2 节也是必考章节（**注意：6.3 节非考察内容**），无论是相对容易的**解方程（求基础解系）**（或者是**带参量的分类讨论**）还是**线性方程组解空间的性质**，无论是本章中讨论的线性方程组解的理论问题还是综合之前所学的内容都是可能考察的。在此 2.5 节也会略微帮助大家回顾一下之前的内容，当然详细的展开在期中复习资料中。

2.2 线性方程组有解的充分必要条件

本节讨论的内容，没有做特别的说明，应当是齐次/非齐次方程组都适用的。本节内容没有完全按照教材排布，是希望大家不是死记硬背结论，而是能够遇到变式的定理都能理解并给出证明。

定理 1 （线性方程组有解的充要条件）线性方程组有解的充分必要条件是其系数矩阵与增广矩阵有相同的秩。

定理的证明非常简单，将方程组视为

$$x_1\boldsymbol{\beta}_1 + x_2\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\beta}_n = \boldsymbol{b}$$

然后利用教材定理 2.4 即可证明。

从定理 1 看出，判断线性方程组有没有解，只要去比较它的系数矩阵与增广矩阵的秩是否相等，不一定需要化成阶梯矩阵解方程。（当然最基本的数字参量题目**（如教材 P199 例 2）还是需要原始方法解决，教材中解法请务必掌握**，接下来的内容带有拓展性质）

求解矩阵的秩可以利用矩阵和行列式两章中讲到的一些性质：

①矩阵的行秩 ＝ 列秩；

②矩阵的秩 ＝ 行列式的秩，而矩阵非零子式的最高阶数即为行列式的秩;

例 设 $s \times n$ 矩阵 A 为

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & \cdots & a^{n-1} \\ 1 & a^2 & a^4 & \cdots & a^{2(n-1)} \\ & & \vdots & & \\ 1 & a^s & a^{2s} & \cdots & a^{s(n-1)} \end{pmatrix}$$

其中 $s \le n$，且当 $0 < r < n$ 时，$a^r \neq 1$.求 A 的秩和它的列向量组的一个极大线性无关组。

（提示：从这其中可以找出一个 s 阶范德蒙行列式（一定要能认出来），可以得到 $\boldsymbol{r(A) \geq s}$，然后利用行秩等于列秩 $\boldsymbol{r(A) \leq s}$ 可以得到答案。关于极大线性无关组，有一个结论：矩阵的不等于零的 r 阶子式所在的列（行）构成 A 的列（行）向量组的一个极大线性无关组。证明很简单，来源于第二章期中复习介绍过的结论）

其次，有时不用求出系数矩阵的秩和增广矩阵的秩，也能比较它们的秩是否相等。由于系数矩阵 A 是增广矩阵 B 的子矩阵，因此 $r(A) \le r(B)$。如果还能证明 $r(A) \ge r(B)$，那么就得出 $r(A) = r(B)$。

定理 2 线性方程组**有解时**：

①如果它的系数矩阵 A 的秩等于未知量的数目 n，则方程组有唯一解；

②如果 A 的秩小于 n，则方程组有无穷多个解。

推论 齐次线性方程组有非零解的充要条件是：它的系数矩阵的秩小于未知量的数目。（对于方阵即为行列式一章描述的，有非零解充分必要条件为其行列式为 0）

定理 2 对应齐次线性方程组即为教材定理 6.1 结论，对于非齐次的情况，<u>注意本定理前提：方程组有解</u>。证明时将方程组化为简化阶梯矩阵即可。

最后再给出一个练习：

已知线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

的系数矩阵 A 的秩等于下述矩阵 B 的秩：

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ & & \cdots\cdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n & 0 \end{pmatrix}$$

求证：上述线性方程组有解。

（提示：使用上面某个以“其次”开头段落介绍的方法）

2.3 齐次线性方程组解的结构

对于齐次线性方程组$AX = \mathbf{0}$，我们有：

定理 1 其解空间为 R^n 的子空间。（证明时回忆子空间的证明方法）

在确认其为线性空间后，我们来研究该线性空间的基本性质。首先是由此引出的关于基础解系的概念。基础解系即为齐次线性方程组解空间的一组基，且这组基的每一个线性组合都是该方程组的解、

然后我们来研究这一空间的维数：

定理 2 若矩阵$A \in M_{m\times n}(F)$，若 $r(A) = r$，则该齐次线性方程组解空间维数为 $n - r$。

该定理即为教材定理 6.1，证明使用维数公式（教材定理 3.2）。本定理改写为类似于维数公式的形式即为 $r(A) + \dim N(A) = n$。

一个小的练习：若 n 元齐次线性方程组 $AX = 0$ 的解都是 $BX = 0$ 的解，则 $\boldsymbol{r(B) \le r(A)}$。

定理 3 齐次线性方程组解空间的正交补是由方程组**行向量**为基张成的线性空间。

该定理描述可以参考教材，也可以参考期中复习第四章最末的内容。本定理中考虑了行向量张成的行空间，以往我们考虑列空间更多。

2.4 非齐次线性方程组解的结构

对于非齐次线性方程组

$$x_1\boldsymbol{\beta}_1 + x_2\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\beta}_n = \boldsymbol{b}\ (\boldsymbol{b} \neq \mathbf{0}) \qquad (1)$$

我们将 n 元齐次线性方程组

$$x_1\boldsymbol{\beta}_1 + x_2\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\beta}_n = \mathbf{0} \qquad (2)$$

称为其导出组，则我们有：

（说明：教材定理 6.2 相关内容在本资料 2.1 节中已提及，因此不再赘述）

定理 1 如果 n 元非齐次线性方程组有解，则它的解集 U 为

$$U = \{\gamma_0 + \eta | \eta \in W\}$$

其中γ_0为（1）的一个解（称为特解），W为（2）的解空间（（2）的解称为通解）。

对于通解+特解，我们可以想象一个 3 元非齐次线性方程 $ax + by + cz = d$ 和齐次线性方程 $ax + by + cz = 0$。非齐次线性方程的解显然对应一个不过原点的平面，而齐次则过原点。我们便可以认为是齐次线性方程解平面沿着特解对应的向量平移到非齐次线性方程的解平面，这便是这一结论的几何解释。同时我们可以得到下述结论：

性质 1　n 元非齐次线性方程组（1）的两个解的差是它的导出组（2）的一个解。

性质 2　n 元非齐次线性方程组（1）的一个解与它的导出组（2）的一个解之和仍是非齐次线性方程组（1）的一个解。

这两个性质证明比较简单，实际上根据上述几何描述形象理解也不困难。上述定理与性质对应教材定理 6.3，可以参看。

补天建议：下面凭借着我残存的记忆做出不负责任的猜测（×）：根据吴志祥老师去年在课堂上说的“有命题老师经常喜欢出这个题”以及去年考试第 7 题（没记错的话）的考察内容，教材 **P200 例 3 仍然是可能的考点，请务必掌握！**（去年应当是考察了一个变式题，与本题条件有些许区别，最后是二元的线性无关证明）。当然不是说把这个题背下来，而是理解这个题的想法以及背后的知识点，毕竟考原题是很难的事情（虽然不排除可能性）。

2.5　综合应用

本章涉及的内容从最开始学习的解方程开始，其后依次涉及了线性（子）空间、线性相关性、正交补、维数公式、矩阵的秩、行列式的秩与性质等内容，故本章相当于带领大家回顾了整本书的重点内容。因此一些题目综合性较强，下面给出一些基本的例子。

例 1　设 A、B 分别是 $m \times n$ 和 $n \times s$ 矩阵，且 $AB = O$，证明 $r(A) + r(B) \le n$。

本题即为教材 P196 例 2，证明时将 B 的列向量与 $AX = 0$ 的解空间联系，利用定理 6.1 即可很容易解决。这一定理在证明其他结论时十分常用，特别是结合之前介绍的定理：

（i）$r(A + B) \le r(A) + r(B)$，$r(AB) \le \min\{r(A), r(B)\}$；

（ii）设 A 为 $m\times n$ 矩阵，B 为 $n\times s$ 矩阵，则$r(AB) \ge r(A) + r(B) - n$；

（iii）$r\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} = r(A) + r(B)$，$r\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix} \ge r(A) + r(B)$。

例如：

例 2　证明：

①若矩阵 A 满足 $A^2 = A$（幂等矩阵），求证：$r(A) + r(E - A) = n$；

②若 n 阶矩阵 A 满足 $A^2 = E$，求证：$r(A + E) + r(A - E) = n$。

例 3　设 A 是 $m \times n$ 实矩阵，证明 $r(A^{\mathrm{T}}A) = r(A)$。

例 3 拓展：求证：方程 $A^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{X} = A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$ 总是有解。(有解的充要条件是否还记得？)

以上习题均来源于教材，例 2 为 P210 习题 9、10，例 3 为 P196 例 3。例 3 中需要的不等式在本资料 2.3 节定理 2 小练习中是不是见过呢？

例 4　求一个齐次线性方程组，使它的基础解系为 $X_1 = (0, 1, 1, 2)^{\mathrm{T}}$，$X_2 = (2, 1, 1, 0)^{\mathrm{T}}$。

（提示：这种类型题目群内有讨论，基本方法是先将基础解系扩张为完整 n 维空间然后做施密特正交化，新的向量即为方程组行向量，具体原理见前述 2.3 节定理 3）。

例 5　设 A、B 分别是 $m \times n$ 和 $n \times s$ 矩阵，证明：若方程组$(AB)\boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}$ 与 $B\boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}$ 同解，则 $r(AB) = r(B)$。(教材 P210 第 6 题)

例 5 拓展：设 A、B 是 n 阶方阵，求证：

①$(AB)\boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}$ 与 $B\boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}$ 同解 $\Leftrightarrow r(AB) = r(B)$；

②$r(A^n) = r(A^{n+1})$。（提示：零空间停止增长（之前 whjdl 有提到）是一种可行思路，当然也有其他解法）

结合这一例和例 3，若 A 为方阵，则 $A^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{X} = \mathbf{0}$ 和 $A\boldsymbol{X} = \mathbf{0}$ 同解。

例 6　教材 P214 习题 9。本题是最小二乘法在线性代数中的解法，在微积分 II 或数学分析 II 中大家还会遇到其他解法。

当然本题意义不仅在于是经典问题的解，而且在于其解答过程中使用的一些技巧，例如内积的一些处理，这在第七章中也是常用的。

总的来说，此处主要是介绍了关于处理秩的一些技巧题，其他类型题目可见教材等。