线性图形与内积空间

彭湃

2023 年 5 月 13 日

1　三维欧氏空间中的线性图形

1.1　线性图形的表示

1.1.1　平面的方程

平面 $\pi: ax+by+cz+f=0$，其一个**法向量**为 $\mathbf{n}=(a,b,c)$

1.1.2　直线的方程

对称式：$l: \frac{x-x_0}{X}=\frac{y-y_0}{Y}=\frac{z-z_0}{Z}$，其**方向向量**为 $\mathbf{v}=(X,Y,Z)$，**直线上一点的坐标**为 $P_0(x_0,y_0,z_0)$

一般式：$l: \begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z+f_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z+f_2=0 \end{cases}$，可看作两平面的交线.

如何**将一般式化为对称式**：先求出方向向量 $\mathbf{v}=(a_1,b_1,c_1)\times(a_2,b_2,c_2)$（为什么是这样算的？），再从直线上任取一点 P_0（在三维空间中任取一个满足一般式的点）

注：

1. 对称式体现了决定直线的两个几何量，即方向向量及直线上一点坐标. 在更多情况下采用对称式进行计算更加直观方便.
2. 方向向量分量 X,Y,Z 中可能有一者或两者为 0，如若 Z=0, 则说明 $z-z_0=0$ 恒成立，直线与 xOy 平面平行或重合
3. 对称式方程的参数形式：$\begin{cases} x=Xt+x_0 \\ y=Yt+y_0 \\ z=Zt+z_0 \end{cases}$

4. 经过定直线的平面束可表示为

$$\lambda(a_1x+b_1y+c_1z+f_1)+\mu(a_2x+b_2y+c_2z+f_2)=0$$

   平面束中的平面由比值 $\lambda:\mu$ 唯一确定. 特别地，$\lambda:\mu=1:0$ 时，平面为 $a_1x+b_1y+c_1z+f_1=0$; $\lambda:\mu=0:1$ 时, 平面为 $a_2x+b_2y+c_2z+f_2=0$

1.2 线性图形的位置关系

判断两个线性图形的位置关系可以综合代数和几何两个角度进行分析.

1.2.1 代数角度

将两个线性图形的方程联立起来，得到的线性方程组即为两个线性图形的交集的方程。具体地：

1. 线性方程组无解 $\Leftrightarrow$ 两个线性图形没有交点 $\Leftrightarrow \begin{cases}\text{两直线平行或异面}\\ \text{直线与平面平行}\\ \text{两平面平行}\end{cases}$

2. 线性方程组有唯一解 $\Leftrightarrow$ 两个线性图形有一个交点 $\Leftrightarrow \begin{cases}\text{两直线相交}\\ \text{直线与平面相交}\end{cases}$

3. 线性方程组有无数解 $\Leftrightarrow$ 两个线性图形有无数交点 $\Leftrightarrow \begin{cases}\text{两直线重合}\\ \text{直线在平面内}\\ \text{两平面相交或重合}\end{cases}$

1.2.2 几何角度

记直线 l_1,l_2 的方向向量分别为 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2$, $P_1(x_1,y_1,z_1),P_2(x_2,y_2,z_2)$ 分别位于 l_1,l_2 上，平面 π_1,π_2 的法向量分别为 $\mathbf{n}_1,\mathbf{n}_2$

1. (重要)l_1,l_2 异面 $\Leftrightarrow (\overrightarrow{P_1P_2},\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2)\neq 0$

2. l_1,l_2 平行或重合 $\Leftrightarrow \mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2$ 平行 ($\mathbf{v}_2=\lambda\mathbf{v}_1$ 即 $\mathbf{v}_1\times\mathbf{v}_2=0$)

3. l_1,π_1 平行或包含 $\Leftrightarrow \mathbf{v}_1,\mathbf{n}_1$ 垂直 ($\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{n}_1=0$)

4. π_1,π_2 平行或重合 $\Leftrightarrow \mathbf{n}_1,\mathbf{n}_2$ 平行 ($\mathbf{n}_2=\lambda\mathbf{n}_1$ 即 $\mathbf{n}_1\times\mathbf{n}_2=0$)

至于到底是平行还是重合/包含，需要取点进行进一步验证.

1.2.3 具体方法

判断线性图形的位置关系可具体采用以下办法:

1. 为判断两直线的位置关系，宜将其均化为对称形式，然后进行以下讨论：(**两直线异面** $\Leftrightarrow (\overrightarrow{P_1P_2}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \neq 0$)

```
if((P_1P_2,v_1,v_2)!=0){异面;}
else if(v_1 不平行于 v_2){相交;}
else if(P_1在l_2上){重合;}
else{平行;}
```

2. 为判断直线与平面的位置关系，可将直线化为一般式，与平面方程联立，判断线性方程组解的情况. 无解 $\Leftrightarrow$ 平行，唯一解 $\Leftrightarrow$ 相交，无数解 $\Leftrightarrow$ 包含; 也可以通过几何关系验证.

3. 为判断两平面的位置关系，联立方程判断解的情况，同时注意两个平面的法向量.

```
if(无解){平行;}
else if(法向量不平行){相交;}
else {重合;}
```

1.3 线性图形的度量关系

1.3.1 点到直线的距离

记 $\mathbf{v}$ 为直线 l 的方向向量，$P_0(x_0, y_0, z_0)$ 是直线 l 上一点，由叉乘的几何意义知点 $P(x_1, y_1, z_1)$ 到直线 l 的距离为

$$d = \frac{|\overrightarrow{P_0P_1} \times \mathbf{v}|}{|\mathbf{v}|}$$

1.3.2 直线到直线的距离

为计算与平行直线的距离，只需在其中一条直线上任取一点，计算该点到另一条直线的距离即可.

两异面直线

$$l_1 : \frac{x - x_1}{X_1} = \frac{y - y_1}{Y_1} = \frac{z - z_1}{Z_1}$$
$$l_2 : \frac{x - x_2}{X_2} = \frac{y - y_2}{Y_2} = \frac{z - z_2}{Z_2}$$

的距离为 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 在 $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$ 方向上的投影 (为什么？)，即

$$d = \frac{|(\overrightarrow{P_1P_2}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)|}{|\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2|} = \frac{\left\|\begin{matrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{matrix}\right\|}{\sqrt{\begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} Z_1 & X_1 \\ Z_2 & X_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix}^2}}$$

1.3.3 点/直线/平面到平面的距离

点 $P(x_1, y_1, z_1)$ 到平面 $\pi : ax + by + cz + f = 0$ 的距离为

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + f|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

为计算与 π 平行的直线或平面到 π 的距离，只需在该直线或平面上任取一点，计算该点到 π 的距离即可.

1.4 例题

1. 判别下列各对直线的相互位置. 如果是异面直线，求出它们之间的距离.

(1) $\begin{cases} x - 2y + 2z = 0 \\ 3x + 2y - 6 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x + 2y - z - 11 = 0 \\ 2x + z - 14 = 0 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 3x - 2y + z = 0 \\ x - 3y + 5 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x - 3z + 2 = 0 \\ x + y + z + 1 = 0 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x = t \\ y = 2t + 1 \\ z = -t - 2 \end{cases}$ $\frac{x-1}{4} = \frac{y-4}{7} = \frac{z+2}{-5}$

2. 判断下列直线与平面的位置关系.

(1)$\begin{cases} x = t \\ y = -2t + 9 \\ z = 9t - 4 \end{cases}$ $3x - 4y + 7z - 10 = 0$

(2)$\begin{cases} x = 3z - 1 \\ y = 2z - 3 \end{cases}$ $x + y + z = 0$

3.(1) 求过点 $P_0(1,1,1)$ 且与两直线

$$l_1 : \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$$

$$l_2 : \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{4}$$

都相交的直线的方程

(2) 求过点 $P_0(1,0,1)$ 且与两直线

$$l_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{1}$$

$$l_2 : \frac{x}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{0}$$

都垂直的直线的方程

(3) 求过点 $P_0(1,0,-2)$ 与平面 $\pi : 3x - y + 2z + 4$ 平行，与直线 $l : \frac{x-1}{4} = \frac{y-3}{-2} = z$ 相交的直线方程

(4) 求过点 $P_0(11,9,0)$ 且与两直线

$$l_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{4} = \frac{z-5}{3}$$

$$l_2 : \frac{x}{5} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{2}$$

都相交的直线的方程

(5) 求

$$l_1 : x = y = z$$

$$l_2 : \frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{3}$$

夹角的角平分线方程

4.(1) 求通过直线 $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y + 3z = 0 \end{cases}$ 且平行于直线 $x - 1 = 2y = 3z$ 的平面的方程

(2) 求通过直线 $l : \frac{x-1}{0} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+2}{-3}$ 且与点 P(2,2,2) 距离等于 2 的平面的方程

2 内积空间

2.1 内积与范数

域 F 上的线性空间 V 上的**内积**指映射 $<\cdot,\cdot>: V\times V\to F$, 对任意的 V 中元素 x,y,z, 及 F 中元素 c，其满足:

1. $<x+z,y>=<x,y>+<z,y>$
2. $<cx,y>=c<x,y>$
3. $\overline{<x,y>}=<y,x>$
4. $\langle x,x\rangle>0\ if\ x\neq 0$

内积的性质:

1. $<x,y+z>=<x,y>+<x,z>$
2. $<x,cy>=\overline{c}<x,y>$
3. $<x,0>=<0,x>=0$
4. $<x,x>=0\Leftrightarrow x=0$
5. If $<x,y>=<x,z>$ for all $x\in V$,then $y=z$

在不加说明的情况下，$F^n(F=C\ or\ R)$ 上的内积一般取**标准内积**:

$$\langle x,y\rangle=\sum_{i=1}^{n}x_i\overline{y_i}$$

定义了内积的空间叫做**内积空间**. 内积空间上可定义**范数**:

$$||\cdot||:V\to F,\ ||x||=\sqrt{\langle x,x\rangle}$$

范数的性质:

1. $||cx||=|c|\cdot||x||$
2. $||x||\geq 0,\ (||x||=0\Leftrightarrow x=0)$
3. (勾股定理) 若 $\langle x,y\rangle=0$, 则 $||x+y||^2=||x||^2+||y||^2$
4. (Cauchy-Schwartz Inequality)$|\langle x,y\rangle|\leq||x||\cdot||y||$
5. (Triangle Inequality)$||x+y||\leq||x||+||y||$

2.2 规范正交基

设 $\beta = \{v_1, v_2, ..., v_m\}$ 是内积空间 V 中的线性无关向量组，通过 **Gram-Schmidt 过程**

$$e_j = \frac{v_j - \langle v_j, e_1\rangle e_1 - ... - \langle v_j, e_{j-1}\rangle e_{j-1}}{||v_j - \langle v_j, e_1\rangle e_1 - ... - \langle v_j, e_{j-1}\rangle e_{j-1}||}$$

可得到 V 中的另一线性无关向量组 $\gamma = \{e_1, e_2, ..., e_m\}$，使得 $span(\beta) = span(\gamma)$, 且 $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$，$\gamma$ 称作 V 中的**规范正交组**. 特别地，若 β 为 V 的基，则 γ 也为 V 的基，称作 V 的**规范正交基**.

V 中任意元素可表示为规范正交基的线性组合：

$$v = \langle v, e_1\rangle e_1 + ... + \langle v, e_n\rangle e_n$$

2.3 正交补

设 U 为 V 的子集，U 的**正交补** $U^\perp$ 是由 V 中与 U 的每个向量都正交的那些向量组成的集合：

$$U^\perp = \{v \in V : \langle v, u\rangle = 0,\ \forall u \in U\}$$

重要结论：设 U 为 V 的有限维子空间，则 $V = U \oplus U^\perp$

该结论表明 V 中任何元素 v 可唯一地表示为 U 中一个向量与 $U^\perp$ 中一个向量的和，即

$$v = u + w,\ u \in U,\ w \in U^\perp$$

其中 $u = P_U v$,P_U 称为 V 到 U 上的**正交投影**，是 V 到 U 上的线性映射 (如何验证其是线性的？). $null\, P_U = U^\perp$，$range\, P_U = U$

(求正交投影的方法) 如果 U 有规范正交基 $\{u_1, u_2, ..., u_k\}$, 则

$$u = \sum_{i=1}^{k} \langle v, u_i\rangle$$

u 是 U 中距离 v 最近的唯一的向量，即 $\forall x \in U$, $||v - x|| \geq ||v - u||$, 当且仅当 $x = u$ 时等号成立.

2.4 例题

1.(Parserval's Identity) 令 $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ 为 V 的规范正交基，证明

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle x, v_i\rangle\overline{\langle y, v_i\rangle},\ \forall x, y \in V$$

2.$w_1 = (1, 0, 1, 0), w_2 = (1, 1, 1, 1), w_3 = (0, 1, 2, 1) \in R^4$ 线性无关，试通过 Gram-Schmidt 过程找出一组 R^4 中的标准正交组 $\{u_1, u_2, u_3\}$ 使得

$$span\{u_1, u_2, u_3\} = span\{w_1, w_2, w_3\}$$

3. 令 $V = P(R)$, 定义内积 $\langle f(x), g(x)\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$, 考虑子空间 $P_2(R)$ 及其标准有序基 $\beta = \{1, x, x^2\}$

(1) 试通过 Gram-Schmidt 过程找出 $P_2(R)$ 的一组规范正交基 $\gamma = u_1, u_2, u_3$;

(2) 将 $f(x) = 1 + 2x + 3x^2$ 表示为 γ 中元素的线性组合;

(3) 求 $f(x) = x^3$ 在 $P_2(R)$ 上的正交投影.

内积空间上的算子讲义

数学与应用数学（强基计划）2101 班　冯皓

May 13, 2023

一、伴随算子

为了引出伴随映射，我们先给出一条定理:

定理 1(伴随映射的存在性)

T 是有限维内积空间 V 上的线性算子则
(1)、存在唯一的映射 $T^*: V \to V$ 使得 $< T(x), y > = < x, T^*(y) >$。
(2)、T^* 是线性的。
事实上线性算子可以改成一般的从 V 打到 W 的线性映射，但证明思路与过程相同，因此不再赘述。

注记： $(T^*)^* = T$

在矩阵中 A^* 表示 A 的共轭转置，下面我们来研究伴随算子与表示矩阵之间的关系

定理 2(伴随映射的矩阵表示)

T 是有限维内积空间 V 上的线性算子，β 是 V 的标准正交基则 $[T^*]_\beta = [T]_\beta^*$
特别地，$A \in M_{n*n}(F), L_A : F^n \to F^n, L_A(x) = Ax$，则 $(L_A)^* = L_{A^*}$。

这个定理在线性算子和矩阵之间的转化之间起到了非常重要的作用，那么除此之外，伴随算子存在更多基本的性质:

定理 3(伴随映射的基本性质)

T 为有限维内积空间上的线性算子，则:
(1).$(aT+bU)^* = \overline{a}T^* + \overline{b}U^*$.
(2).$(TU)^* = U^*T^*$.
(3).$T^{**} = T$.
(4).$idv^* = idv$.
特别地, 将 T，U 替换为矩阵结论仍成立。

例：最小二乘法

目标：给定 m 个点 $(t_1, y_1), \cdots\cdots$，(t_m, y_m), 寻找 c,d 使得 $E = \sum_{i=1}^{m}(y_i - ct_i - d)^2$ 最小。
令 $E(c,d) = ||y_1 - ct_1 - d, \ldots\ldots, y_m - ct_m - d||^2 = ||y - Ax||^2$
其中 $y = (y_1, \ldots\ldots\, y_m)^t$,$x = (c,d)^t$,

$$A_{n\times 2} = \begin{pmatrix} t_1 & 1 \\ t_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ t_m & 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

我们需要寻找 x 满足 E 取最小值。

引理

(1).$A \in M_{m\times n}(F), x \in F^n, y \in F^m$, 则在标准内积下 $< Ax, y > = < x, A^*y >$
(2).$A \in M_{m\times n}(F)$ 则 $rank(A^*A) = rank(A)$, 更多地 $rank(A) = rank(A^*) = rank(A^*A) = rank(AA^*)$

定理 4(最小二乘法)

$A \in M_{m\times n}(F)$,$y \in F^m$，则存在 $x \in F^n$，使得
(1).$||Ax_0 - y|| \leq ||Ax - y||$
(2).$A^*Ax_0 = A^*y$
特别地若 $rankA = n$, 则 $x_0 = (A^*A)^{-1}A^*y$。

从定理的证明我们也可以看出 x_0 的选取不一定唯一，但 Ax_0 是唯一的，另外我们可将函数推广至 $y = a_0t^n + a_1t^{n-1} + \ldots\ldots + a_n$。

二、正规与自伴算子

在引入正规和自伴的定义之前，我们先做一些准备工作：

引理：

(1).T 是有限维内积空间上的线性算子，若 T 有特征值 λ, 则 T^* 有特征值 $\overline{\lambda}$。
(2).(舒尔定理)T 是有限维内积空间上的线性算子。若 T 的特征多项式分裂，则存在标准正交基 β 使得 $[T]_\beta^*$ 是上三角阵。
我们再给出正规算子的定义：

定义：

T 是 (有限维) 内积空间上的线性算子则
(1). 若 $TT^* = T^*T$，则 T 是正规算子。
(2). 若 $A^*A = AA^*$，则 $A \in M_{n\times n}(F)$ 是正规矩阵。

由定义我们能得出正规算子的基本性质。

定理 5(正规算子的基本性质)

T 是正规算子则
(1).$||T(x)|| = ||T^*(x)||, \forall x \in V$.
(2). $T - \lambda(id_v)$ 是正规算子。
(3). 若 $T(x) = \lambda x$, 则 $T^*(x) = \overline{\lambda}x$.
(4). 若 $T(x_i) = \lambda_i x_i, i = 1, 2, \lambda_1 \neq \lambda_2$, 则 $< x_1, x_2 >= 0$.
注记：T 正规 $\Leftrightarrow T^*$ 正规。

定理 6(复线性空间算子正交对角化的充要条件)

T 是有限维复内积空间上的线性算子，则 T 是正规算子当且仅当存在标准正交基 β 使得 $[T]_\beta$ 为对角阵。

注记：$A \in M_{n\times n}(C)$，$A^*A = AA^*$ 且 A 是上三角矩阵，则 A 为对角矩阵。
然而，在无穷维空间的情况下，自伴算子可能不存在特征值。
在复数域上有一个很好的性质就是特征多项式分裂，但在实数域中并非如此，为了探究实数域中内积空间线性算子正交对角化的充要条件，我们引入自伴的定义。

定义：

T 是有限维复内积空间上的线性算子，
(1) 若 $T = T^*$, 则 T 是自伴算子
(2) 若 $A = A^*$, 则：$A \in M_{n\times n}(F)$ 是自伴矩阵。

与正规算子类似，我们先做一些准备工作

引理：

(1). 若 T 正规且可对角化，则存在标准正交基 β 使得 $[T]_\beta$ 为对角阵。
(2). T 是有限维内积空间的自伴算子则
(a). 任何特征值为实数。
(b). 若 F=R，则 T 的特征多项式分裂。
注记:$A \in M_{n\times n}(R)$,$A = A^T$, 则 A 的特征多项式在 R 中分裂。

定理 7(实线性空间算子正交对角化的充要条件)

T 是有限维实内积空间上的线性算子，则 T 是自伴算子当且仅当存在标准正交基 β 使得 $[T]_\beta$ 为对角阵。

如果知道了一个算子可正交对角化，则说明其表示矩阵与一个对角阵相似，相比于一般的可对角化，正交对角化具有更好地性质。

定义：

(1)P 为 n 阶复矩阵，$P\overline{P}^T = I_n$, 则 P 为酉矩阵。
(2)P 为 n 阶实矩阵，$PP^T = I_n$, 则 P 为正交矩阵。

定理 8(矩阵可正交对角化的充要条件)

(1).$A \in M_{n\times n}(C)$,$A^*A = AA^*$⇔ 存在酉矩阵 P 使得 $P^{-1}AP$ 为对角阵。
(2).$A \in M_{n\times n}(R)$,$A = A^T$⇔ 存在正交矩阵 P 使得 $P^{-1}AP$ 为对角阵。
其中，$P = (v_1, \ldots\ldots v_n)$，$v_i$ 为 A 的以 λ_i 为特征值的特征向量。

三、酉算子和正交算子

定义:

T 是有限维内积空间上的线性算子, 若 $||T(x)|| = ||x||, (\forall x \in V)$, 则 T 为酉算子（F=C）或正交算子（F=R）。
注记：(1).$||x|| = ||T(x)|| = 0$，因此 T 为单射，又因为 V 有限维，T 为双射。
(2) 若 $dimV = \infty$, T 单射且 $||T(x)|| = ||x||, (\forall x \in V)$，则称 T 为等距同构。若 T 满射，则称 T 为酉算子和正交算子。

定理 9(等距同构的等价条件)

T 是有限维内积空间上的线性算子，则以下等价
(1). $TT^* = T^*T = id_V$.
(2).$< T(x), T(y) >=< x, y >, \forall x, y \in V$
(3). 若 β 是 V 的标准正交基则 $T(\beta)$ 也是 V 的标准正交基。
(4). 存在标准正交基 β 使得 $T(\beta)$ 是 V 的标准正交基。
(5). $||T(x)|| = ||x||, (\forall x \in V)$
有此我们有下面的推论：
(1).F=R 则 V 存在一组由特征向量组成的标准正交基，且特征值为 1 或-1⇔T 是自伴且正交算子。
(2).F=C 则 V 存在一组由特征向量组成的标准正交基，且特征值的模长为 1⇔T 是酉算子。

四、极分解和奇异值分解

定义：

(1).T 是有限维内积空间上的线性算子，若 T 是自伴的且 $< T(x), x >> 0(< T(x), x >\geq 0), \forall x \neq 0$，则 T 是正定的 (半正定的) 算子。
(2). 类似地，若对于 n 维方阵 A，若 L_A 是正定的 (半正定的) 算子，则 A 为正定矩阵。
同样地，我们先做一些准备工作。

引理：

(1). 若 $U = U^*$, 则 U 是半正定的 $\Leftrightarrow$U 的特征值非负。
(2). $T : V \to W$, $T^* : W \to V$, 则 TT^* 和 T^*T 是半正定的且 $rank(TT^*) = rank(T^*T) = rank(T) = rank(T^*)$.
(3). $A \in M_{m\times n}(F)$, 则 A^*A 和 AA^* 是半正定的 $rank(A) = rank(A^*) = rank(A^*A) = rank(AA^*)$.
(4). (a).$T : V \to V$ 半正定，$U : V \to V$ 等距同构 $(U^* = U^{-1})$, 则 $U^*TU = U^{-1}TU$ 是半正定的。
(b).$A \in M_{n\times n}(F)$ 半正定且 $P \in M_{n\times n}(F)$, 满足 $P^* = P^1$, 则 $P^*AP = P^{-1}AP$ 半正定。

定理 10：奇异值分解的映射形式

$T : V \to W$ 线性映射，$rank(T) = r$, 则存在 V 和 W 上的标准正交基 $\{v_1, \ldots\ldots, v_n\}$ 和 $\{u_1, \ldots\ldots, u_m\}$，以及 $\sigma_1 \geq \ldots\ldots \geq \sigma_r \geq 0$，使得

$$T(v_i) = \begin{cases} \sigma_i u_i, 1 \leq i \leq r \\ 0, r < i \leq n \end{cases} \tag{2}$$

相反地，若上述成立则 $v_1, \ldots\ldots, v_n$ 为 $T^*T : V \to V$ 对应特征值 $\sigma_1^2, \ldots\ldots\sigma_r^2, 0, \ldots\ldots\ 0$ 的特征向量。特别地，$\sigma_1, \ldots\ldots\sigma_r$ 由 T 唯一决定。更多地，$\sigma_1, \ldots\ldots\sigma_r$ 称为 T 的奇异值。
同样地，我们给矩阵奇异值给出定义：$A \in M_{n\times n}(F)$，$rank(A) = r$,A 的奇异值为 $L_A = F^n \to F^m$ 的奇异值。

定理 11：奇异值分解矩阵形式

$A \in M_{n\times n}(F)$，$rank(A) = r$, 奇异值 $\sigma_1 \geq \ldots\ldots \geq \sigma_r \geq 0$, 则存在酉矩阵 (F=C) 或正交矩阵 (F=R)，$U \in M_{m\times m}(F)$ 和 $V \in M_{n\times n}(F)$，使得 $A = U\Sigma V^*(\Leftrightarrow AV = U\Sigma)$, 其中,

$$\Sigma_{m\times n} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \sigma_r & \\ & & & \end{pmatrix} \tag{3}$$

其中，$A = U\Sigma V^*$ 为 A 的奇异值分解。

定理 12：极分解定理

$A \in M_{n\times n}(F)$，则存在一个酉矩阵 (正交矩阵)W 和半正定矩阵 P 使得 A=WP。更多地，若 A 可逆，则分解唯一。

内积空间上的算子习题

数学与应用数学（强基计划）2101 班　冯皓

May 13, 2023

Question 1

(正定与半正定算子的定义与性质)T 和 U 是 n 维内积空间 V 的自伴算子，令 $A = [T]_\beta$, 其中 β 是 V 的标准正交基证明以下结果：
(a) T 是正定的 (半正定的) 当且仅当 T 的特征值为正的（非负的）。
(b) T 是正定的当且仅当

$$\sum_{i,j} A_{ij} a_j \overline{a_i} > 0, \quad \forall (a_1, a_2, \ldots\ldots a_n) \neq 0 \tag{1}$$

(c) T 是半正定的当且仅当存在 n 维方阵 B 使得 $A = B^* B$。
(d) T 和 U 是半正定的满足 $T^2 = U^2$, 则 $T = U$。
(e) T 和 U 是正定的满足 $TU = UT$, 则 TU 是正定的。
(f) T 是正定的（半正定的）当且仅当 A 是正定的（半正定的）。

Question 2

(a)（同时可对角化）V 是有限维实内积空间，U，T 是 V 上的自伴算子满足 $UT = TU$。证明存在 V 上的标准正交基，使得基中的每个向量同时是 U 和 V 的特征向量。
（在此之前我们回顾一下伴随算子和正交补空间的一些性质）

Lemma

T 是内积空间 V 上的线性算子，令 W 是 V 的 T-不变子空间，证明下列结论：
(a) 若 T 是自伴的，则 T_W 是自伴的。
(b) $W^\perp$ 是 T^* 不变的。
(c) 如果 W 是 T-不变以及 T^* 不变的，则 $(T_W)^* = (T^*)_W$。
(d) 如果 W 是 T-不变以及 T^* 不变的，且 T 是正规的，则 T_W 是正规的。

（b）(选做) V 是有限维复内积空间，U，T 是 V 上的正规算子满足 $UT = TU$。证明存在 V 上的标准正交基，使得基中的每个向量同时是 U 和 V 的特征向量。

Question 3

（等距同构）U 是内积空间 V 上的酉算子，令 W 是 V 中的有限维 U 不变子空间证明：
(a) $U(W) = W$。
(b) $W^\perp$ 是 U-不变的。
(提示：由于题目未说 V 为有限维空间，则不能借用伴随映射以及 <T(x)=T(y)>=<x,y>，于是第二小问应当用定义去证明)

Question 4

（奇异值分解）（1）证明：若 A 是正定矩阵并且 $A = U\Sigma V^*$ 是 A 的奇异值分解，则 U=V。
（极分解）（2）令 A 是方阵且存在极分解 A=WP,
（a）证明 A 是正规矩阵当且仅当 $WP^2 = P^2W$。
（b）证明 A 是正规矩阵当且仅当 $WP = PW$

Question 5

(内积空间综合)(1).V 是内积空间，存在内积 $<\cdot,\cdot>$, 令 T 是 V 上的正定算子。证明，$<x,y>'=<T(x),y>$ 定义了 V 的另外一种内积。

(2).V 是有限维内积空间，且令 T 和 U 是 V 上的自伴算子，满足 T 是正定算子。证明 TU 和 UT 为可对角化的线性算子且仅有实特征值。

(3).V 是有限维内积空间，存在内积 $<\cdot,\cdot>$，令 $<\cdot,\cdot>'$ 是 V 的另一种内积。

(a) 证明存在唯一的线性算子 T，满足 $<x,y>'=<T(x),y>, \forall x,y\in V$.

(b) 证明 (a) 中的算子 T 是正定的 (相对于两种内积而言)。

(4). U 是有限维内积空间 V 的可对角化线性算子，特征值为实数。证明存在正定算子 T_1 和 $T_1^{'}$ 和自伴算子 T_2 和 $T_2^{'}$ 满足 $U=T_2T_1=T_1^{'}T_2^{'}$.