1.(1)

3:(1). 解：首先计算出两个直线的标准方程为：

$$l_1: \frac{x}{-2}=\frac{y-3}{3}=\frac{z-3}{4},\quad l_2: \frac{x-7}{2}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z}{-4}.$$

因为

$$-2:3:4=2:-3:4\neq 7:-1:-3$$

所以由定理 2.4.3 知 $l_1 \parallel l_2$.

(2)

4:(2). 解：两直线的对称式方程为

$$l_1: \frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-8}{-7},\quad l_2: \frac{x-1}{3}=\frac{y+3}{-4}=\frac{z-1}{1}.$$

所以它们之间的距离为

$$d=\frac{\left\|\begin{vmatrix} 3 & -4 & -7 \\ 3 & 1 & -7 \\ 3 & -4 & 1 \end{vmatrix}\right\|}{\sqrt{\begin{vmatrix} 1 & -7 \\ -4 & 1 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} -7 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}^2}}=\frac{4\sqrt{170}}{17}.$$

(3)

(3). 解：两直线的对称式方程为

$$l_1: \frac{x}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+2}{-1},\quad l_2: \frac{x-1}{4}=\frac{y-4}{7}=\frac{z+2}{-5}.$$

因为

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 4 & 7 & -5 \end{vmatrix}=0,$$

所以 l_1 和 l_2 共面. 又显然 $1:2:-1\neq 4:7:-5$, 所以它们相交.

2.(1)

7. 解:(2) 直线的方向向量为 $\vec{v}=(1,-2,9)$, 平面的法向量为 $\vec{n}=(3,-4,7)$,$\vec{v}$ 与 $\vec{n}$ 不平行,

$$\vec{v}\cdot\vec{n}=3+8+63=74\neq 0$$

即知直线与平面相交.

(2)

(3) 设直线的方向向量为 $\vec{v}$, 则有

$$\vec{v}\cdot(1,0,-3)=\vec{v}\cdot(0,1,-2)=0$$

解得 $\vec{v}=(3,2,1)$. 记平面的法向量为 $\vec{n}=(1,1,1)$, 显然 $\vec{v}$ 与 $\vec{n}$ 不平行.

$$\vec{v}\cdot\vec{n}=3+2+1=6\neq 0$$

即知直线与平面相交.

3.(1)(2)

1. 解：(方法 1): 设所求直线 l 的方向矢量为 $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$, 则其对称式方程为

$$\frac{x-1}{v_1}=\frac{y-1}{v_2}=\frac{z-1}{v_3}.$$

因为 l 与 l_1,l_2 均相交，那么由定理 2.4.3 知

$$\begin{cases} \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}=0 \\ \det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}=0 \end{cases}.$$

由此得

$$v_1=0,\ v_2=\frac{1}{2}v_3.$$

则所求直线的方程为

$$l:\frac{x-1}{0}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{2}.$$

(方法 2) 首先判断两条直线的关系可得 l_1,l_2 共面, 显然 l_1,l_2 不平行, 从而两条直线相交, 记交点为 Q, 联立直线方程可得 $Q=(1,2,3)$. 记直线 l_1,l_2 所在的平面为 π, 则 π 的法向向量为

$$\vec{n}=(1,2,3)\times(2,1,4)=(5,2,-3)$$

可得 π 的方程为

$$5(x-1)+2(y-2)-3(z-3)=5x+2y-3z=0$$

显然点 P 不在平面 π 上, 设所求直线为 l, 由于 l 与 l_1,l_2 都相交, 则 l 必过 Q 点, 即得 l 的方向向量为 $\vec{v}=(0,1,2)$, l 的方程为

$$\frac{x-1}{0}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{2}.$$

1:(4). 解：依题意，所求直线的方向矢量为 $\vec{v}=(2,1,1)\times(1,-1,0)=(1,1,-3)$. 又过定点 $P_0(1,0,1)$, 所以易知直线的向量式参数方程为:

$$\mathbf{r}(t)=(t+1,t,1-3t),$$

坐标式参数方程为:

$$\begin{cases} x=t+1, \\ y=t, \\ z=-3t+1, \end{cases}$$

标准方程为:

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{-3}.$$

(以上三种方程，任何一种均可)

3.(3): π 的法向量 $\vec{n}=(3,-1,2)$　l 的方向向量 $\vec{v}=(4,-2,1)$　$P_1(1,3,0)$

记所求直线 l_1 的方向向量为 $\vec{v_1}=(\alpha,\beta,\gamma)$

l_1 与 π 平行 $\Rightarrow \vec{n}\cdot\vec{v_1}=0$ 即 $3\alpha-\beta+2\gamma=0$　①

l_1 与 l 相交 $\Rightarrow (\overrightarrow{P_1P_0},\vec{v},\vec{v_1})=\begin{vmatrix} 10 & -3 & -2 \\ 4 & -2 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix}=0$ 即 $7\alpha+8\beta-12\gamma=0$　②

联立求解①②，可取 $\vec{v}=(\alpha,\beta,\gamma)=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -1 & 2 \\ 7 & 8 & -12 \end{vmatrix}=(-4,50,31)$

l_1: $\dfrac{x-1}{-4}=\dfrac{y}{50}=\dfrac{z+2}{31}$　($\vec{v}$ 与 $(3,-1,2)$ 及 $(7,8,-12)$ 均垂直，故可取 $\vec{v}=(3,-1,2)\times(7,8,-12)$)

(4):(与(1)类似)　l_1: $\vec{v_1}=(2,4,3)$　$P_1(1,-3,5)$

l_2: $\vec{v_2}=(5,-1,2)$　$P_2=(0,2,-1)$

所求直线 l: $\vec{v}=(\alpha,\beta,\gamma)$　$P_0=(11,9,0)$

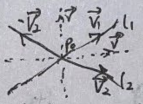
与 l_1 相交 $\Rightarrow (\overrightarrow{P_1P_0},\vec{v_1},\vec{v})=0 \Rightarrow -7\alpha+5\beta-2\gamma=0$

与 l_2 相交 $\Rightarrow (\overrightarrow{P_2P_0},\vec{v_2},\vec{v})=0 \Rightarrow -15\alpha+17\beta+46\gamma=0$

$\Rightarrow \vec{v}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -7 & 5 & -2 \\ -15 & 17 & 46 \end{vmatrix}=44(6,8,-1)$

l: $\dfrac{x-11}{6}=\dfrac{y-9}{8}=\dfrac{z}{-1}$

(5): 如右图所示，角平分线有两条，相交于 $P_0(0,0,0)$



l_1: $P_0(0,0,0)$　$\vec{v_1}=(1,1,1)$

l_2: $P_0(0,0,0)$　$\vec{v_2}=(2,1,3)$

角平分线 l: $P_0(0,0,0)$　$\vec{v}=(\alpha,\beta,\gamma)$

法一: $\cos\langle\vec{v_1},\vec{v}\rangle=\pm\cos\langle\vec{v_2},\vec{v}\rangle \Rightarrow \dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{\sqrt{3}\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}=\pm\dfrac{2\alpha+\beta+3\gamma}{\sqrt{14}\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}$　①

(± 号的说明: $\vec{v}$ 可以夹在 $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$ 中间，也可以夹在 $\vec{v_1}$, $-\vec{v_2}$ 中间，如上图所示)

仅靠①式无法解出 $\vec{v}$，说明缺少条件，注意到 $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$, $\vec{v}$ 共面，

故可根据 $0=(\vec{v_1},\vec{v_2},\vec{v})=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix}$ 得到另一关系式，联立①解出 $\vec{v}$，

也可设 $\vec{v}=\lambda\vec{v_1}+\mu\vec{v_2}=(\lambda+2\mu,\lambda+\mu,\lambda+3\mu)$，将 $\begin{cases}\alpha=\lambda+2\mu\\ \beta=\lambda+\mu\\ \gamma=\lambda+3\mu\end{cases}$ 代入①得

$(6\lambda+14\mu)=\pm\sqrt{42}(\lambda+2\mu) \Longrightarrow \lambda^2=\dfrac{14}{3}\mu^2$

取 $\mu=\sqrt{3}$, $\lambda=\pm\sqrt{14}$，得 $\vec{v}=(\pm\sqrt{14}+2\sqrt{3},\pm\sqrt{14}+\sqrt{3},\pm\sqrt{14}+3\sqrt{3})$，$l$: $\dfrac{x}{\pm\sqrt{14}+2\sqrt{3}}=\dfrac{y}{\pm\sqrt{14}+\sqrt{3}}=\dfrac{z}{\pm\sqrt{14}+3\sqrt{3}}$

法二: $\vec{v}=\dfrac{\vec{v_1}}{|\vec{v_1}|}\pm\dfrac{\vec{v_2}}{|\vec{v_2}|}=\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\pm\dfrac{2}{\sqrt{14}},\dfrac{1}{\sqrt{3}}\pm\dfrac{1}{\sqrt{14}},\dfrac{1}{\sqrt{3}}\pm\dfrac{3}{\sqrt{14}}\right)$　l: $\dfrac{x}{\frac{1}{\sqrt{3}}\pm\frac{2}{\sqrt{14}}}=\dfrac{y}{\frac{1}{\sqrt{3}}\pm\frac{1}{\sqrt{14}}}=\dfrac{z}{\frac{1}{\sqrt{3}}\pm\frac{3}{\sqrt{14}}}$

4. (1): $l: \frac{x-1}{1}=\frac{y}{\frac{1}{2}}=\frac{z}{\frac{1}{3}}$，$\vec{v}=6(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3})=(6,3,2)$

设所求平面π: $\lambda(x+y+z)+\mu(2x-y+3z)=0$ $\quad \vec{n}=(\lambda+2\mu, \lambda-\mu, \lambda+3\mu)$

l与π平行 $\Rightarrow \vec{v}\cdot\vec{n}=0 \Rightarrow 11\lambda+15\mu=0$

取$\lambda=15, \mu=-11$ 得π: $-7x+26y-18z=0$.

(2)解: $l: \begin{cases} x-1=0 \\ 3y+2z-2=0 \end{cases}$

设平面π: $\lambda(x-1)+\mu(3y+2z-2)=0$ $\quad \vec{n}=(\lambda, 3\mu, 2\mu)$ $\quad \cancel{P_1(1,2,-2)}$

$d(P,\pi)=\frac{|\lambda+8\mu|}{\sqrt{\lambda^2+13\mu^2}}=2 \Rightarrow 3\lambda^2-16\lambda\mu-12\mu^2=0 \Rightarrow \lambda=-\frac{2}{3}\mu$或$\lambda=6\mu$

取$\begin{cases} \mu=3 \\ \lambda=-2 \end{cases}$ $\quad \pi_1: -2x+9y+6z-4=0$

$\begin{cases} \mu=1 \\ \lambda=6 \end{cases}$ $\quad \pi_2: 6x+3y+2z=8$

1. 证明: $x=\sum_{i=1}^{n}\langle x, v_i\rangle v_i$，$y=\sum_{j=1}^{n}\langle y, v_j\rangle v_j$ $\quad$ (注意到$\langle v_i, v_j\rangle=\delta_{ij}=\begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i\neq j \end{cases}$)

$\langle x, y\rangle=\langle \sum_{i=1}^{n}\langle x, v_i\rangle v_i, \sum_{j=1}^{n}\langle y, v_j\rangle v_j\rangle=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\langle x, v_i\rangle\overline{\langle y, v_j\rangle}\langle v_i, v_j\rangle=\sum_{i=1}^{n}\langle x, v_i\rangle\overline{\langle y, v_i\rangle}$

2. 解: $v_1=w_1=(1,0,1,0)$，$u_2=\frac{v_1}{\|v_1\|}=(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}},0)$

$v_2=w_2-\langle w_2, u_1\rangle u_1=(0,1,0,1)$，$u_2=\frac{v_2}{\|v_2\|}=(0,\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}})$

$v_3=w_3-\langle w_3, u_1\rangle u_1-\langle w_3, u_2\rangle u_2=(-1,0,1,0)$，$u_3=\frac{v_3}{\|v_3\|}=(-\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}},0)$

(检验$\langle u_i, u_j\rangle=\delta_{ij}=\begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases}$).

Example 5

Let $\mathsf{V} = \mathsf{P}(R)$ with the inner product $\langle f(x), g(x)\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,dt$, and consider the subspace $\mathsf{P}_2(R)$ with the standard ordered basis β. We use the Gram–Schmidt process to replace β by an orthogonal basis $\{v_1, v_2, v_3\}$ for $\mathsf{P}_2(R)$, and then use this orthogonal basis to obtain an orthonormal basis for $\mathsf{P}_2(R)$.

Take $v_1 = 1$. Then $\|v_1\|^2 = \displaystyle\int_{-1}^{1} 1^2\,dt = 2$, and $\langle x, v_1\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} t\cdot 1\,dt = 0.$ Thus

$$v_2 = x - \frac{\langle v_1, x\rangle}{\|v_1\|^2} = x - \frac{0}{2} = x.$$

Furthermore,

$$\langle x^2, v_1\rangle = \int_{-1}^{1} t^2\cdot 1\,dt = \frac{2}{3} \quad\text{and}\quad \langle x^2, v_2\rangle = \int_{-1}^{1} t^2\cdot t\,dt = 0.$$

Therefore

$$\begin{aligned} v_3 &= x^2 - \frac{\langle x^2, v_1\rangle}{\|v_1\|^2}v_1 - \frac{\langle x^2, v_2\rangle}{\|v_2\|^2}v_2 \\ &= x^2 - \frac{1}{3}\cdot 1 - 0\cdot x \\ &= x^2 - \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

We conclude that $\{1, x, x^2 - \frac{1}{3}\}$ is an orthogonal basis for $\mathsf{P}_2(R)$.

To obtain an orthonormal basis, we normalize v_1, v_2, and v_3 to obtain

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{\int_{-1}^{1} 1^2\,dt}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$u_2 = \frac{x}{\sqrt{\int_{-1}^{1} t^2\,dt}} = \sqrt{\frac{3}{2}}\,x,$$

and similarly,

$$u_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|} = \sqrt{\frac{5}{8}}\,(3x^2 - 1).$$

Thus $\{u_1, u_2, u_3\}$ is the desired orthonormal basis for $\mathsf{P}_2(R)$. ♦

Example 6

We use Theorem 6.5 to represent the polynomial $f(x) = 1 + 2x + 3x^2$ as a linear combination of the vectors in the orthonormal basis $\{u_1, u_2, u_3\}$ for $\mathsf{P}_2(R)$ obtained in Example 5. Observe that

$$\langle f(x), u_1 \rangle = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + 2t + 3t^2)\, dt = 2\sqrt{2},$$

$$\langle f(x), u_2 \rangle = \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{3}{2}}t(1 + 2t + 3t^2)\, dt = \frac{2\sqrt{6}}{3},$$

and

$$\langle f(x), u_3 \rangle = \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{5}{8}}(3t^2 - 1)(1 + 2t + 3t^2)\, dt = \frac{2\sqrt{10}}{5}\ .$$

Therefore $f(x) = 2\sqrt{2}\, u_1 + \dfrac{2\sqrt{6}}{3}\, u_2 + \dfrac{2\sqrt{10}}{5}\, u_3.$ ♦

Example 10

Let $\mathsf{V} = \mathsf{P}_3(R)$ with the inner product

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\, dt \quad \text{for all } f(x), g(x) \in \mathsf{V}.$$

We compute the orthogonal projection $f_1(x)$ of $f(x) = x^3$ on $\mathsf{P}_2(R)$.

By Example 5,

$$\{u_1, u_2, u_3\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}\, x, \sqrt{\frac{5}{8}}\,(3x^2 - 1) \right\}$$

is an orthonormal basis for $\mathsf{P}_2(R)$. For these vectors, we have

$$\langle f(x), u_1 \rangle = \int_{-1}^{1} t^3 \frac{1}{\sqrt{2}}\, dt = 0, \qquad \langle f(x), u_2 \rangle = \int_{-1}^{1} t^3 \sqrt{\frac{3}{2}}\, t\, dt = \frac{\sqrt{6}}{5},$$

and

$$\langle f(x), u_3 \rangle = \int_{-1}^{1} t^3 \sqrt{\frac{5}{8}}\,(3t^2 - 1)\, dt = 0.$$

Hence

$$f_1(x) = \langle f(x), u_1 \rangle\, u_1 + \langle f(x), u_2 \rangle\, u_2 + \langle f(x), u_3 \rangle\, u_3 = \frac{3}{5}x. \quad ♦$$

Date. Page.

4

Question 1

正定与半正定定义：T有限维内积空间上的线性算子，T是正定的(半正定的)当T是自伴的且 $\langle T(x),x\rangle>0$ [$\langle T(x),x\rangle\geq 0$] $\forall x\neq 0$

(正定) $A_{n\times n}$ 正定或半正定的当 L_A 是正定或半正定的

(a) T自伴 存在标准正交基 $\gamma=\{v_1\cdots v_n\}$ 对应特征值 $\lambda_1,\cdots\lambda_n$. ($\lambda_1,\cdots\lambda_n\in R$)

$\forall x\in V$ $x=x_1v_1+\cdots x_nv_n$ $T(x)=\lambda_1x_1v_1+\cdots+\lambda_nx_nv_n$

$\Rightarrow$ $\langle T(x),x\rangle=\lambda_1\langle x_1v_1,x_1v_1\rangle+\cdots\lambda_n\langle x_nv_n,x_nv_n\rangle>0$

由x任意性 $\Rightarrow$ 将 $v_1,\cdots v_n$ 分别代入 $\Rightarrow\lambda_1,\cdots\lambda_n>0$

$\Leftarrow$ $\lambda_1,\cdots\lambda_n>0$ $\langle T(x),x\rangle>0$

(半正定同理)

(b) $\sum_{i,j}A_{ij}a_j\overline{a_i}=[x]_\beta^*A[x]_\beta=\langle T(x),x\rangle$

$x=a_1u_1+\cdots+a_nu_n$

(c) $\Leftarrow$ $\langle Ax,x\rangle=x^*B^*Bx=\langle Bx,Bx\rangle\geq 0$ $\forall x$ 由(b) T正定

$\Rightarrow$ $A=P^*\mathrm{diag}(\lambda_1\cdots\lambda_n)P$ 由(a) $\lambda_1\cdots\lambda_n\geq 0$ P为酉矩阵

相似性

$B=P^*\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}\cdots\sqrt{\lambda_n})P$ $B^*=P^*\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}\cdots\sqrt{\lambda_n})P$

$B^*B=A$

(d) T^2与T保持特征空间不变且特征值为平方关系

U^2与U ～

$T^2=U^2\Rightarrow$ T和U有相同的特征空间对应相同的特征值

T, U半正定 对 T^2,U^2特征值开根时仅存在唯一的非负解

(e) $(TU)^*=U^*T^*=UT=TU\Rightarrow TU$自伴

由Question 2. T, U可同时正交对角化

即存在标准正交基 $\beta=\{v_1\cdots v_n\}$ 使得 $T(v_i)=\lambda_i>0$ $U(v_i)=u_i>0$

TU的特征值为 $\lambda_iu_i>0$ $\Rightarrow$ TU正定

同时对角化

对应标准正交基 $\beta=\{v_1\cdots v_n\}$

(f) $\langle T(x),x\rangle=[x]_\beta^*A[x]_\beta=\langle L_A([x]_\beta),[x]_\beta\rangle$

Lemma: 证明 W

(a) $\forall x,y\in W \quad \langle T_W(x),y\rangle=\langle T(x),y\rangle=\langle x,T^*(y)\rangle=\langle x,T(y)\rangle=\langle x,T_W(y)\rangle$

$\Rightarrow T_W^*$ 存在且 $T_W=T^*_W$

(b) $\forall x\in W^\perp,\ y\in W \quad \langle T^*(x),y\rangle=\langle x,\underset{\uparrow\ W\ T\text{不变}}{T(y)}\rangle=0$

$\Rightarrow T^*(x)\in W^\perp$

(c) $\forall x,y\in W \quad \langle T_W(x),y\rangle=\langle T(x),y\rangle=\langle x,T^*(y)\rangle\underset{\uparrow\ W\ T^*\text{不变}}{=}\langle x,(T^*)_W(y)\rangle$

$(T^*)_W=(T_W)^*$

(d) $T^*T=TT^* \quad T_W(T_W)^*\overset{(c)}{=}T_W(T^*)_W\underset{\uparrow\ T^*\ W\text{不变}}{=}(TT^*)_W=(T^*T)_W\underset{\uparrow\ T\ W\text{不变}}{=}T^*_W T_W\overset{(c)}{=}(T_W)^*T_W$

Question 2 (1)

证明: $\lambda_1,\dots\lambda_k$ 是T的不同特征值 E_{λ_i}为特征子空间

$V=E_{\lambda_1}\oplus\dots\oplus E_{\lambda_k}$

$\forall x\in E_{\lambda_i} \quad TU(x)=UT(x)=\lambda_i U(x) \Rightarrow U(x)\in E_{\lambda_i} \Rightarrow E_{\lambda_i}$为U不变子空间

由引理 $U_{E_{\lambda_i}}$是自伴的,则存在E_{λ_i}的标准正交基 β_i 由$U_{E_{\lambda_i}}$的特征向量组成

$\beta=\beta_1\cup\dots\cup\beta_k$, β是V的标准正交基 且β中向量同时为T和U的特征向量

3. (a) 由题意 W U不变 $U(W)\subseteq W$

$\|x\|=\|T(x)\|=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow T$单射

断言 W有限维 $U(W)=W$

(b) W是有限维 $V=W\oplus W^\perp$ ($y=u+z,\ u\in W\ z\in W^\perp$ 且 u,z唯一)

$\forall y\in V$ $\{v_1\dots v_k\}$是W的标准正交基

存在性 $u=\sum_{i=1}^{k}\langle y,v_i\rangle v_i$ 要证明 $z=y-u\in W^\perp$

$\langle z,v_j\rangle=\langle y-\sum_{i=1}^{k}\langle y,v_i\rangle v_i,v_j\rangle=\langle y,v_j\rangle-\langle y,v_j\rangle=0$ □

唯一性: $y=u'+z' \quad u'\in W \quad z'\in W^\perp$

$\Rightarrow u+z=u'+z' \Rightarrow u-u'=z-z'\in W\cap W^\perp=\{0\}$ □

证明: 取$x\in W^\perp$ $U(x)=y+z,\ y\in W\ z\in W^\perp$

由(a) $\exists\ w\in W\ y=U(w)$ 则 $\|z\|^2=\|U(x)-y\|^2=\|U(x-w)\|^2=\|x-w\|^2$

$=\|x\|^2+\|w\|^2\geq\|x\|^2$

另一方面 $\|x\|=\|U(x)\|=\sqrt{\|y\|^2+\|z\|^2}\geq\|z\|$ $\Rightarrow \|x\|=\|z\|$ $\Rightarrow \|y\|=0$

Question4.

4. (1) 证明 $A=A^*$ $\Sigma=\Sigma^*$ 则

$$A^2=A^*A=V\Sigma U^*U\Sigma V^*=V\Sigma^2V^*=(V\Sigma V^*)^2$$

由于A和$V\Sigma V^*$是正定的 $\Rightarrow A=V\Sigma V^*=U\Sigma V^*$

A正定, Σ, V^*可逆矩阵 $\Rightarrow V=U$

(2)(a) $AA^*=WP^2W^*$ $A^*A=PW^*WP=P^2$

$AA^*=A^*A \Leftrightarrow WP^2W^*=P^2$

$\Leftrightarrow WP^2=P^2W$

(b) $\Leftarrow$ $WP=PW$ $WP^2=PWP=P^2W \overset{(a)}{\Rightarrow}$ A正规

$\Rightarrow$ A正规 $\Rightarrow WP^2=P^2W \Rightarrow P^2=WP^2W^*=(WPW^*)^2$

P和WPW^*半正定 $\Rightarrow P=WPW^* \Rightarrow PW=WP$

Question5

5. (1) 证明 $\langle x_1+x_2,y\rangle'=\langle T(x_1+x_2),y\rangle=\langle T(x_1),y\rangle+\langle T(x_2),y\rangle=\langle x_1,y\rangle'+\langle x_2,y\rangle'$

$\langle cx_1,y\rangle'=\langle T(cx_1),y\rangle= c\langle T(x_1),y\rangle=c\langle x_1,y\rangle'$

$\langle x,y\rangle'=\langle T(x),y\rangle=\langle x,T(y)\rangle=\overline{\langle T(y),x\rangle}=\overline{\langle y,x\rangle'}$

$\langle x,x\rangle'=\langle T(x),x\rangle>0$ $\forall x\neq 0$

$\Rightarrow$ $\langle\,,\rangle'$定义V的另一内积

(2) 证明 由(1) $\langle x,y\rangle'=\langle T(x),y\rangle$ 为V的一种内积

$\langle UT(x),y\rangle'=\langle TUT(x),y\rangle=\langle UT(x),T(y)\rangle=\langle T(x),UT(y)\rangle=\langle x,UT(y)\rangle'$

$\Rightarrow$ UT在$\langle,\rangle'$下自伴 $\Rightarrow$ UT可对角化且特征值为实数

$TU=T(UT)T^{-1} \Rightarrow$ TU可对角化且特征值为实数

(3)(a) $\forall x\in V$ $g: V\to F$ $g(y)=\langle y,x\rangle'$ 为线性泛函

由定理6.42 $\exists$唯一的$z\in V$ 使得 $g(y)=\langle y,z\rangle$ 定义 $T(x)=z$

$\Rightarrow \langle y,x\rangle'=\langle y,z\rangle=\langle y,T(x)\rangle \Rightarrow \langle x,y\rangle'=\langle T(x),y\rangle$

还需证明T为线性的 $\langle T(x_1+x_2),y\rangle=\langle x_1+x_2,y\rangle'=\langle x_1,y\rangle'+\langle x_2,y\rangle'=\langle T(x_1),y\rangle+\langle T(x_2),y\rangle$

$=\langle T(x_1)+T(x_2),y\rangle$

$\langle T(cx),y\rangle=\langle cx,y\rangle'=c\langle x,y\rangle'=c\langle T(x),y\rangle$

唯一性 $\langle y,z\rangle=\langle y,T(x)\rangle$ $\forall y \Rightarrow \boxed{z=T(x)}$

Date.　　Page.

(2) 引理：① $\langle T(x),x\rangle=0\ (\forall x\in V)$ 则 $T(x)=0\ \forall x\in V$

$\langle T(x+y),x+y\rangle=\langle T(x),x\rangle+\langle T(y),y\rangle+\langle T(x),y\rangle+\langle T(y),x\rangle$

$=\langle T(x),y\rangle+\langle T(y),x\rangle=0$

用 iy 代替 y $\langle T(x+iy),x+iy\rangle=-i\langle T(x),y\rangle+i\langle T(y),x\rangle=0$

$\Rightarrow\langle T(x),y\rangle\ \forall x,y\Rightarrow T=0$

② 若 $\langle T(x),x\rangle$ 是实数 $\forall x\in V$ 则 $T=T^*$

$\langle T(x),x\rangle=\langle x,T(x)\rangle=\langle T^*(x),x\rangle\Rightarrow\langle(T-T^*)(x),x\rangle=0\overset{①}{\Rightarrow}T=T^*$

证明：$\langle T(x),x\rangle=\langle x,x\rangle'\geq 0$ 由引理② $T=T^*$

但事实上引理成立的条件是F是复线性空间，但此题未说明F为复空间 有难以说清楚的地方，因此换一种证法．（由表示矩阵的定义验证）

令 $\beta=\{v_1\cdots v_n\}$ 是V在 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 意义下的标准正交基 $[T]_\beta=A$ 则 $A_{ij}=\langle v_j,v_i\rangle'$

$\begin{cases}x=a_1v_1+\cdots+a_nv_n\\y=b_1v_1+\cdots+b_nv_n\end{cases}$

$[T(x)]_\beta=\begin{pmatrix}\sum_{i=1}^n a_i\langle v_i,v_1\rangle'\\\vdots\\\sum_{i=1}^n a_i\langle v_i,v_n\rangle'\end{pmatrix}$　$\langle T(x),y\rangle=\sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^n\overline{b_j}a_i\langle v_i,v_j\rangle'$

$[T(y)]_\beta=\begin{pmatrix}\sum_{i=1}^n b_i\langle v_i,v_1\rangle'\\\vdots\\\sum_{i=1}^n b_i\langle v_i,v_n\rangle'\end{pmatrix}$　$\langle x,T(y)\rangle=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_i\overline{b_j}\,\overline{\langle v_j,v_i\rangle'}$

$=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_i\overline{b_j}\langle v_i,v_j\rangle=\langle T(x),y\rangle$

$\Rightarrow$ T在 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 下是自伴的 $\langle T(x),x\rangle=\langle x,x\rangle'>0\ (\forall x\neq 0)\Rightarrow$ 正定的

$\langle T(x),y\rangle'=\langle TT(x),y\rangle=\langle T(x),T(y)\rangle=\langle x,T(y)\rangle'$

$\Rightarrow$ T在 $\langle\cdot,\cdot\rangle'$ 下自伴的 $\langle T(x),x\rangle'=\langle T(x),T(x)\rangle>0\ (\forall x\neq 0)$ ($T(x)$ 正定 $\Rightarrow$ 双射 $\Rightarrow T(x)=0$ $\Leftrightarrow x=0$)

$\Rightarrow$ T在 $\langle\cdot,\cdot\rangle'$ 下正定的

(4) 令 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是V上的内积 β是V上的由U的特征向量组成的基 $\{v_1\cdots v_n\}$

令 $\langle\cdot,\cdot\rangle'$ 是V上的另一个内积 定义 $x=\sum_{i=1}^{n}a_iv_i,\ y=\sum_{i=1}^{n}b_iv_i$

则 $\langle x,y\rangle'=\sum_{i=1}^{n}a_i\bar{b_i}$ 则 $\{v_1\cdots v_n\}$ 在 $\langle\cdot,\cdot\rangle'$ 下是一组标准正交基

由(3) 存在一个正定的线性算子 T_1（相对于 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 和 $\langle\cdot,\cdot\rangle'$）满足 $\langle x,y\rangle'=\langle T_1(x),y\rangle$

$U(v_i)=\lambda_iv_i$（λ_i为实数）则 $\langle U(v_i),v_j\rangle'=\lambda_i\delta_{ij}=\lambda_j\delta_{ij}=\langle v_i,U(v_j)\rangle'$ $(\forall i,j)$

$\Rightarrow$ U在 $\langle\cdot,\cdot\rangle'$ 下是自伴的 则

$\langle U(x),T_1(y)\rangle=\langle T_1U(x),y\rangle=\langle U(x),y\rangle'=\langle x,U(y)\rangle'=\langle T_1(x),U(y)\rangle=\langle x,T_1U(y)\rangle$

将y替代 $T_1^{-1}(y)$ 得

$\langle U(x),y\rangle=\langle x,T_1UT_1^{-1}(y)\rangle$

$\Rightarrow$ U在 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 下的伴随为 $U^*=T_1UT_1^{-1}$ $\Rightarrow$ $U=T_1^{-1}U^*T_1=T_2T_1$

其中 $T_2=T_1^{-1}U^*$ 由T_1正定则T_1^{-1}正定（在两个内积下）则 T_2 在 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 上的伴随 —

$T_2^*=UT_1^{-1}$ $\langle T_2^*(x),y\rangle=\langle UT^{-1}(x),y\rangle=\langle T^{-1}UT^{-1}(x),y\rangle'=\langle UT^{-1}(x),T^{-1}(y)\rangle'$

$=\langle T^{-1}(x),UT^{-1}(y)\rangle'=\langle x,UT^{-1}(y)\rangle$

$\Rightarrow$ T_2^* 在 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 下自伴 $\Rightarrow$ T_2 在 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 下自伴

另一方面令 $T_1'=T_1^{-1}$ $T_2'=U^*T_1$ T_2' 在 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 上的伴随 $(T_2')^*=T_1U$

$\langle T_1U(x),y\rangle=\langle U(x),y\rangle'=\langle x,U(y)\rangle'=\langle T_1(x),U(y)\rangle=\langle x,T_1U(y)\rangle$

$\Rightarrow(T_2')^*$ 在 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 下自伴 $\Rightarrow$ T_2' 在 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 下自伴

选做题：

证明 $\lambda_1\cdots\lambda_k$ 是U不同的特征值 $V=E_{\lambda_1}\oplus\cdots\oplus E_{\lambda_k}$

$\forall\ v\in E_{\lambda_i}$ $TU(v)=UT(v)\Rightarrow\lambda_iT(v)=UT(v)\Rightarrow T(v)\in E_{\lambda_i}\Rightarrow E_{\lambda_i}$是T不变子空间

令T_i为V到E_{λ_i}的正交投影 则 $T=\lambda_1T_1+\cdots+\lambda_kT_k$

对 $\forall x=x_1+x_2$ $y=y_1+y_2$, $x_1\in E_{\lambda_i}$ $x_2\in E_{\lambda_i}^{\perp}$ $y_1\in E_{\lambda_i}$ $y_2\in E_{\lambda_i}^{\perp}$

$\langle T_i(x),y\rangle=\langle x_1,y\rangle=\langle x_1,y_1\rangle=\langle x_1+x_2,y_1\rangle=\langle x,T_iy\rangle$

$\Rightarrow\forall$ 正交投影 T_i, T_i自伴

则 $T=\lambda_1T_1+\cdots+\lambda_kT_k$ g多项式 $g(T)=g(\lambda_1)T_1+\cdots+g(\lambda_k)T_k$

$T^*=\bar{\lambda_1}T_1^*+\cdots+\bar{\lambda_k}T_k^*=\bar{\lambda_1}T_1+\cdots+\bar{\lambda_k}T_k$

由拉格朗日插值定理 $\exists g(x)\in\mathbb{C}[x]$ $g(\lambda_i)=\bar{\lambda_i}$ $i=1,\cdots,k$

$\exists g$

$\Downarrow$

$\Rightarrow g(T)=T^*$

由于U和T可交换 $\Rightarrow$ U和$T^*=g(T)$可交换

由引理(d) $T_{E_{\lambda_i}}$正规的 则$\exists E_{\lambda_i}$的标准正交基β_i 由$T_{E_{\lambda_i}}$的特征向量组成

$\beta=\beta_1\cup\cdots\cup\beta_k$ β是V的标准正交基且β中的向量同时为T和U的特征向量.