11.19 线性变换

by 姜姜 (translated by)

第一部分 线性变换，核与像，维数理论

【习题1.1】 设 V 和 W 是线性空间，$T: V \to W$ 是线性映射。

1. 证明：T 是单射当且仅当 T 将 V 的线性无关子集映射到 W 的线性无关子集
2. 假设 T 是单射且 S 是 V 的一个子集。证明：S 是线性无关的当且仅当 $T(S)$ 是线性无关的
3. 设 $\beta = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ 是 V 的一个基，且 T 是单射且是满射。证明：$T(\beta) = \{T(v_1), T(v_2), \cdots, T(v_n)\}$ 是 W 的一个基

【定义】 设 V 是一个线性空间，W_1 和 W_2 是 V 的子空间且 $V = W_1 \oplus W_2$。线性变换 $T: V \to V$ 满足：对 $\forall x = x_1 + x_2, x_1 \in W_1, x_2 \in W_2$ 都有 $T(x) = x_1$，称 T 为沿 W_2 在 W_1 上的投影。

【习题1.2】 使用上面定义中的记号，假设 $T: V \to V$ 为沿 W_2 在 W_1 上的投影。

1. 证明：T 是线性变换，$W_1 = \{x \in V : T(x) = x\}$。
2. 证明：$W_1 = \mathrm{Im}(T)$ 且 $W_2 = \ker(T)$。
3. 如果 $W_1 = V$，试描述 T。
4. 如果 W_1 是零空间，试描述 T。

【习题1.3】 假设 W 试有限维线性空间 V 的一个子空间。

1. 证明：存在一个子空间 W' 和一个映射 $T: V \to V$，使得 T 是沿 W' 在 W 上的投影。
2. 给出向量空间 V 的子空间 W 的一个例子，使得存在两个在 W 上的投影，它们分别沿两个不同的子空间。

【习题1.4】 设 V 是有限维线性空间，$T: V \to V$ 是线性映射。

1. 设 $V = \mathrm{Im}(T) + \ker(T)$，证明：$V = \mathrm{Im}(T) \oplus \ker(T)$
2. 设 $\mathrm{Im}(T) \cap \ker(T) = \{0\}$，证明：$V = \mathrm{Im}(T) \oplus \ker(T)$

> 温馨提醒：使用维数的有限性时请说明。

第二部分 线性映射的矩阵表示

【习题2.1】 设 V 和 W 是线性空间，S 是 V 的子集。定义 $S^0 = \{T = L(V, W) : T(x) = 0, \forall x \in S\}$。证明下列命题：

1. S^0 是 $L(V, W)$ 的子空间
2. 如果 S_1 和 S_2 是 V 的子集且 $S_1 \subseteq S_2$，那么 $S_2^0 \subseteq S_1^0$
3. 如果 V_1, V_2 是 V 的子空间，那么 $(V_1 + V_2)^0 = V_1^0 \cap V_2^0$

【习题2.2】 设 V 和 W 是满足 $\dim(V) = \dim(W)$ 的线性空间，$T: V \to W$ 是线性映射。证明：V 和 W 分别存在有序基 β, γ，使得 $[T]_\beta^\gamma$ 是对角矩阵。

第三部分 线性映射的复合与矩阵乘法

【习题3.1】设 A 是一个 $m \times n$ 矩阵，B 是一个 $n \times p$ 矩阵。用 u_j 和 v_j $j(1 \le j \le p)$表示 AB 和 B 的第 j 列。

这题小盆友们自己看一下哦，我不讲啦~

1. 设 z 是 F^p 中的一个列向量。证明：Bz 是 B 的列向量的线性组合。特别地，如果 $z = (a_1, a_2, \cdots, a_p)^T$，证明 $Bz = \sum_{j=1}^{p} a_j v_j$。
2. 在 1 的基础上证明：AB 的第 j 列是 A 的线性组合，其系数是 B 的列中的元素。
3. 对任意行向量 $w \in F^m$，证明：wA 是 A 的行向量的线性组合，其系数是 w 的坐标。

> 提示：使用 1 中应用的变换运算的性质

4. 证明 2 中的结论在行上的类推：AB 的第 i 行是 B 的线性组合，其系数是 A 的列中的元素。

本题答案暂不译

【习题3.2】设 V 是一个有限维线性空间，$T : V \to V$ 是线性变换。

1. 若 $\mathrm{rank}(T) = \mathrm{rank}(T^2)$，证明：$\mathrm{Im}(T) \cap \ker(T) = \{0\}$。进一步证明：$V = \mathrm{Im}(T) \oplus \ker(T)$。
2. 证明：对某些正整数 k 成立 $V = \mathrm{Im}(T^k) \oplus \ker(T^k)$。

【习题3.3】设 V 是线性空间。确定所有使得 $T = T^2$ 的 V 上的线性变换 $T : V \to V$。

> 提示：注意到 $\forall x \in V, x = T(x) + (x - T(x))$，证明：$V = \{y : T(y) = y\} \oplus \ker(T)$

第四部分 可逆性与同构

【习题4.1】设 V 和 W 是 n 维线性空间，$T : V \to W$ 是线性映射。若 β 是 V 的一个基，证明：T 是一个同构，当且仅当 $T(\beta)$ 是 W 的一个基。

【习题4.2】设 V 和 W 是有限维线性空间，$T : V \to W$ 是一个同构。设 V_0 是 V 的一个子空间。

1. 证明：$T(V_0)$ 是 W 的子空间。
2. 证明：$\dim(V_0) = \dim(T(V_0))$。

【习题4.3】设 $T : V \to W$ 是从 n 维线性空间 V 到 m 维线性空间 W 的线性映射。设 β 和 γ 分别是 V 和 W 的有序基。证明：$\mathrm{rank}(T) = \mathrm{rank}(L_A)$ 且 $\dim(\ker(T)) = \dim(\ker(L_A))$，其中 $A = [T]_\beta^\gamma$

> 引理：设 V 和 W 是数域 F 上的线性空间，$\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ 是 V 的一个基。对 W 中的 $w_1, w_2, \cdots, w_m$，存在确定且唯一的线性映射 $T : V \to W$ 使得 $T(v_i) = w_i (i = 1, 2, \cdots, n)$

【习题4.4】设 V 和 W 是有限维线性空间，基分别为 $\beta = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ 和 $\gamma = \{w_1, w_2, \cdots, w_m\}$。由引理知：存在线性变换 $T_{ij} : V \to W$ 使得 $T_{ij}(v_k) = \begin{cases} w_i, k = j \\ 0, k \ne j \end{cases}$ 首先，证明 $\{T_{ij} : 1 \le i \le m, 1 \le j \le n\}$ 是 $L(V, W)$ 的一个基。然后令 M^{ij} 是 $m \times n$ 矩阵，其 i 行和 j 列全为 1，其余元素为 0，证明：$[T_{ij}]_\beta^\gamma = M^{ij}$。由引理又知，存在一个线性变换 $\Phi : L(V, W) \to M_{m\times n}(F)$ 使得 $\Phi(T_{ij}) = M^{ij}$，证明：Φ 是一个同构。

> 提示：你可能用到习题4.1中的结论