线性代数 I（H）期中复习

基础版（与教材难度平齐）

yhwu_is

阅读指南：

这一部分相当于带着大家一起回顾教材，总结了重要的知识。当然也穿插了一些基础题和延伸的内容,加深理解。由于希望在这部分内容中给出完整的思路，因此会显得比较啰嗦......建议阅读时准备好教材，回忆所学内容。对于大佬而言，想必这些内容一定可以在十五分钟之内浏览完毕接下来完成王和钧大佬的更高层次的习题。

一、高斯消元法

注：第一章的内容不同老师讲解的内容有较大区别，但是基本确定的是，期末考试统一命题时直接考察的内容只有高斯消元法，所以此处也只展开 1.8 节。其余内容期中考试（特别是冯涛老师班讲得较多）大家可根据老师讲解情况参照教材和作业进行复习。

1.1 高斯消元法的一般步骤

一般的，对于一个 n 元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

将其系数排列成矩阵$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots\cdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$，且记$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}$，若$\boldsymbol{b} = 0$ 则称此方程为齐次线性方程组，否则为非齐次线性方程组。

再将 n 个未知量记为 n 元列向量：

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

我们便可以把方程组简记为$A\boldsymbol{X} = \boldsymbol{b}$.

令$\boldsymbol{\beta}_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \cdots \\ a_{mi} \end{pmatrix}$，则方程组还可以记为$x_1\boldsymbol{\beta}_1 + x_2\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\beta}_n = \boldsymbol{b}$，这一形式将在之后多次见到。

在以上的记号下，我们可以将解线性方程组的过程转化为矩阵的初等行变换。高斯消元法的一般步骤如下：

$$\textbf{线性方程组} \xrightarrow{①} \textbf{增广矩阵} \xrightarrow{②} \textbf{阶梯矩阵} \xrightarrow{③} \textbf{（行）简化阶梯矩阵} \xrightarrow{④} \textbf{解}$$

①步骤只需要将线性方程组转化为$(A, \boldsymbol{b})$的形式，得到左 n 列为系数矩阵，最后一列为列向量 b 的 n+1 列的增广矩阵；

②步骤是通过初等行变换后，得到教材 P34（1-13）的形式的矩阵——阶梯矩阵。阶梯矩阵系数**全零行在最下方，并且非零行中，在下方的行的第一个非零元素一定在上方行的右侧（每行第一个非零元素称主元素）**。

③步骤将**主元素化 1 后将主元素所在列的其他元素全部通过初等行变换转化为 0** 即可。

④步骤中，我们分三种情况讨论：

（i）有唯一解：没有全零行，且行简化阶梯矩阵对角线上全为 1，其余元素均为 0，此时可以直接写出解；

（ii）无解：出现矛盾方程，即系数为 0 的行的行末元素不为 0，此时直接写无解即可；

（iii）有无穷解：非（i）（ii）情况。此时设出自由未知量将其令为 k_1、k_2......然后代入增广矩阵对应的方程组即可。注意选取自由未知量时，**选取没有主元素出现的列对应的未知量会与标准答案更贴近（如教材 P33 选取 x_2、x_5）**，当然选择其他作为自由未知量也可以。

1.2 练习与运用

参见教材 1.8 节例题 1-3，涵盖了上述三种情况。注意单独考察解方程时，时间充足时

建议将过程写完整，标明初等行变换的具体步骤，并且至少写出阶梯矩阵和行简化阶梯矩阵。除此之外，需要特别小心的是计算中尽量减少错误，时间充足可以解完方程后将答案代入进行检查。

高斯消元法的运用在接下来的介绍中会提及，这将是本教材前六章的核心内容，即从高斯消元法解方程出发，最后再回到最开始的问题——为什么有些方程有唯一解，有些方程却无解或是有无穷多解。

二、线性空间的基本概念

2.1 Abel 群和域的概念

本教材在定义线性空间时使用了 **Abel 群（交换群）和域**的概念，但此内容不属于考试内容，可以参考教材 1.10。特别注意阿贝尔群满足的运算满足**结合律、交换律，且存在单位元和逆元**，这是判断线性空间的加法运算合理性的四条性质。

2.2 线性空间的概念

线性空间定义中的关键概念：

①**非空**集合 V，域 F（线性空间可以记作 $V(F)$）；

②定义**加法**运算：$<V$：$+>$构成 Abel 群；

③定义**数乘**运算：满足教材 P59 定义 2.1 四条性质；

④**特别注意：加法和数乘运算必须封闭**，即 V 中元素经过这两种运算后的结果一定仍旧在 V 中。

线性子空间：

定义见教材 P62 定义 2.3。此处应重点掌握其判断方法（定理 2.1），即**线性空间 $V(F)$ 的非空子集 W 为 V 的子空间的充分必要条件是 W 对于 $V(F)$的线性运算封闭。**

需掌握的基础题——判断是否为线性空间

基本方法：根据上述四条关键概念一一判别，判断**是线性空间时应当逐条验证**，判断不是线性空间时应当对某一条性质举出反例。**特别注意优先检查是否非空（有零元）和加法、数乘运算的封闭性。**

最基本的需要掌握的：

①（**多项式**）$F[x]_{n+1} = \{a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n | a_i \in F\}$构成线性空间，但

$$F[x]_{n+1} = \left\{a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n | a_i \in F\text{且}a_i \neq 0\right\}$$

不构成线性空间.

注：书上常将多项式记为$p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$，$F[x]_{n+1}$表示次数不超过 n 的多项式的集合.

常见记号：$(k_1p_1 + k_2p_2)(x) = k_1p_1(x) + k_2p_2(x)$

②（**复数与实数**）可以验证：全体复数构成的集合$C = \{a + b\mathrm{i} | a, b \in R\}$是数域 $\boldsymbol{C}/\boldsymbol{R}$ 上的线性空间。此处一定注意复数 C 在此处同时出现在集合和数域中。

注意：这一例子表明，同一集合可以在不同数域上构成不同的线性空间。特别是可以验证，线性空间 $C(C)$维数为 1，不同于线性空间 $C(R)$维数为 2。

当然，不同的集合也可以在同一个数域上构成不同的线性空间，例如 $C(R)$和 $R(R)$。

③（**线性方程组的解**）可以验证，齐次线性方程组$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{0}$的解集是线性空间 F^n 的一个子空间，但非齐次线性方程组$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0})$的解不再构成线性空间，因为加法运算不封闭。（具体见教材 P62 的 2.2 节开头的例子以及 P86 习题 3（3））。

练习本节内容时，可以完成教材 P85-86 习题 1、3。

三、线性扩张 线性相关

3.1 线性扩张

线性空间 $V(F)$的非空子集 S 的**线性扩张**为

$$L(S)=\{\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\lambda_k\boldsymbol{\alpha}_k|\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k\in F;\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k\in S;k\in N^*\}$$

是 V 中包含 S 的最小子空间。

证明见定理 2.2，注意证明最小子空间（或其他相同类型的描述）的过程分为两步：第一证明是子空间，第二证明是最小的。证明集合包含关系的方法也在证明中有所体现，此处不再赘述。

我们称$L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k)$为由向量组$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k\}$张成的子空间。若 V 中存在一个有限子集 S 使得 $L(S)=V$，我们称 $V(F)$为有限维线性空间，否则为无限维线性空间。

以上内容中，我们提到一组向量可以张成一个线性空间。那么我们需要关心的问题是，这组向量是否会有“多余”的向量呢？比如二维空间中三个向量(0,1)，(1,0)，(1,1)可以张成一个平面，但是我们知道，只需要前两个向量就可以实现这个目的。那么我们如何评判一组向量是否有类似于上述情况的“多余”的向量呢？为此，我们引入线性相关性的概念。

3.2 线性相关

定义：线性空间 $V(F)$中的向量$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$**线性相关**，指存在不全为 0 的$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m\in F$使得

$$\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{\alpha}_m=0$$

成立。否则称该向量组**线性无关**。

可以从几个角度来考察线相关的向量组与线性无关的向量组的本质区别：

（1）从线性组合看（**定义**）

向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性相关⟵⟶它们有系数不全为 0 的线性组合等于零向量；

向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性无关——⟶它们只有系数全为 0 的线性组合才会等于零向量。

（2）从线性表示看（**定理 2.3**）

向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性相关⟵⟶其中至少有一个向量可以由其余向量线性表示。

向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性无关⟵⟶其中每一个向量都不能由其余向量线性表出。

（3）从齐次线性方程组看（**P66 例 3**）

列向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性相关⟵⟶齐次线性方程组$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_m\boldsymbol{\alpha}_m=0$有非零解;

列向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性无关⟵⟶齐次线性方程组$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_m\boldsymbol{\alpha}_m=0$只有零解。

以上三条性质都是可以直接从定义证明得到的。<u>其中第三条性质对应判断一组向量是否线性相关的方法，属于非常基本的题型</u>。

（4）从向量组线性表示一个向量的方式看（**定理 2.4**）

向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性无关，则向量$\boldsymbol{\beta}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性表示⟵⟶$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}$线性相关且表出方式唯一；

向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性相关⟵⟶表示方式有无穷多种。

（5）从向量组与它的部分组的关系看（**P67 例 6**）

如果向量组的一个部分组线性相关，那么整个向量组也线性相关；

如果向量组线性无关，那么它的任何一个部分组也线性无关。

为了加深对于线性相关性的理解，并且掌握证明的基本方法，给出以下结论留待大家自己证明：

结论 1　如果向量组线性无关，那么把每个向量添上 m 个分量（所添分量的位置对于每个向量都一样）得到的延伸组也线性无关。

结论 2　$\mathbf{R}^n$ 中，任意 $n+1$ 个向量都线性相关。

（提示：考虑齐次线性方程组$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n+x_{n+1}\boldsymbol{\alpha}_{n+1}=0$的解的情况）

结论 3 设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性无关，$\boldsymbol{\beta}=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{\alpha}_m$且$\lambda_i\neq 0$，那么用$\boldsymbol{\beta}$替换$\boldsymbol{\alpha}_i$以后得到的向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i-1},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_{i+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$也线性无关。

结论 4 由非零向量组成的向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性无关的充分必要条件是：每一个$\boldsymbol{\alpha}_i$，（$1<i\le m$）都不能用它前面的向量$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i-1}$线性表示**（教材 P91 习题 6、7 作为拓展）**。

在这一部分定理证明中，不难发现，利用定义以及使用高斯消元法的方法十分常用。

3.3 线性扩张+线性相关→向量组的秩与线性空间的基

有了前述线性扩张和线性相关的叙述，我们接下来便可以回到寻找表示线性空间的最短的向量组的问题上，展开关于向量组的秩与线性空间的基的讨论。

（定义 2.8）若线性空间 $V(F)$的非空子集 S 中存在线性无关的向量组$B=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r\}$，且 S 中每个向量都可以由 B 线性表示，则 B 中向量的个数 r 叫做 S 的**秩**，记作秩$(S)=r$（实际上即为极大线性无关组的长度）。

（定义 2.7）若线性空间 $V(F)$的有限子集$B=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m\}$线性无关，且 $L(B)=V$，则称 B 为 V 的一组**基**，并称 n 为 V 的**维数**，记作 $\dim V=n$。

实际上，综合上述两个定义我们可以看到，如果 S 为有限维线性空间 $V(F)$的子空间，那么 S 的秩就是 S 的维数。

定义 2.7 中我们可以理解到，一个线性空间的基的长度必定是唯一的，否则同一个线性空间将会出现多个不同的维数，这是不合理的。那么我们如何证明这一点呢？实际上，我们的问题可以转化为 $V(F)$中两个向量组$B_1=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m\}$，$B_2=\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n\}$都是线性无关的，并且张成的空间一样，都是 $V(F)$，求证 $m=n$。

采取反证法更为合适，我们假设 $m>n$（另一种情况是对称的，不必重复讨论）。由于两个向量组同时张成 $V(F)$，故B_1中的向量都可以被向量组B_2线性表示，反之亦然。故我们有

$$\begin{cases} a_{11}\boldsymbol{\beta}_1+a_{12}\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+a_{1n}\boldsymbol{\beta}_n=\boldsymbol{\alpha}_1\\ a_{21}\boldsymbol{\beta}_1+a_{22}\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+a_{2n}\boldsymbol{\beta}_n=\boldsymbol{\alpha}_2\\ \qquad\qquad\cdots\cdots\\ a_{m1}\boldsymbol{\beta}_1+a_{m2}\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+a_{mn}\boldsymbol{\beta}_n=\boldsymbol{\alpha}_m \end{cases}$$

而B_1向量组中向量根据已知是线性无关的，故有方程

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_m\boldsymbol{\alpha}_m=0$$

仅有零解。将方程组代入这一方程有

$$(a_{11}x_1+a_{21}x_2+\cdots+a_{m1}x_m)\boldsymbol{\beta}_1+\cdots+(a_{1n}x_1+a_{2n}x_2+\cdots+a_{mn}x_m)\boldsymbol{\beta}_n=0$$

而向量组B_2也是线性无关的，故有

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{21}x_2+\cdots+a_{m1}x_m=0\\ a_{12}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{m2}x_m=0\\ \qquad\qquad\cdots\cdots\\ a_{1n}x_1+a_{2n}x_2+\cdots+a_{mn}x_m=0 \end{cases}$$

但由于 $m>n$，故该齐次线性方程组必有非零解。这与$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_m\boldsymbol{\alpha}_m=0$仅有零解矛盾！故必有 $m=n$。

实际上，在这一定理的证明过程中，我们已经得到了教材**定理 2.5** 的结论，即 $m>n$ 时，长度为 n 的向量组可以将长度为 m 的向量组线性表示，则长度为 m 的向量组必定线性相关，这是由于方程$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_m\boldsymbol{\alpha}_m=0$有非零解。

总结一下，通过这一证明，我们得到了：

①定理 2.5 及其逆否命题（通俗而言，就是长的向量组可以被短的向量组线性表示，那么长的向量组必然有“多余”的向量）

②两个向量组都线性无关且张成的空间一样（能互相线性表示），则其长度一致

③在②的基础上，得到线性空间的基的长度（维数）的唯一性

这一定理是了解线性空间结构的重要定理，基于这一定理基于这一定理不仅可以有大量的关于线性空间结构的结论证明，还是理解线性空间、向量组等概念的重要桥梁。如果存在理解难度，可以先考虑 1-3 维的例子。为了加深理解，我们继续引入等价向量组的概念。

我们称可以互相线性表示的两个向量组为**等价向量组**。可以回忆教材 1.3 节等价关系，可知等价向量组必须满足**自反性、对称性以及传递性**。证明难度不大，留待读者自行证明。

同样的，我们给出一些结论留待读者自行证明以加深理解：

结论 1　教材 P70 定义 2.8 下方四条结论

结论 2

①设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$的秩为 r，则$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$的任意 r 个线性无关的向量都构成它的一个极大线性无关组；

②设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$的秩为 r，则若$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$可以由其中的 r 个向量$\boldsymbol{\alpha}_{i1}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{ir}$线性表出，那么$\boldsymbol{\alpha}_{i1}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{ir}$是$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$的一个极大线性无关组。

（**提示：根据极大线性无关组的定义的两个关键词①线性无关②张成空间。**根据定义，我们可以将问题简化，实际上①等价于秩为 r 的向量组 S 中 r 个**线性无关**的向量一定可以**张成 $\boldsymbol{L(S)}$**，②等价于秩为 r 的向量组 S 中长度为 r 且可以**张成 $\boldsymbol{L(S)}$**的向量组一定**线性无关**。虽然结论看起来非常显然，但仍需严谨证明。证明时采取反证法并结合定理 2.5 即可）

结论 3　一个向量组的任何一个线性无关组都可以扩充成一个极大线性无关组。**（定理 2.6，又称扩基定理）**

结论 4　将上述结论向量组推广至线性空间，可以得到：

①设 $\dim V = n$，则 V 中任意 n+1 个向量都线性相关；

②设 $\dim V = n$，则 V 中任意 n 个线性无关的向量都是 V 的一个基；

③设 $\dim V = n$，设$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n \in V$。若 V 中每一个向量都可以由$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$线性表示，那么$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$是 V 的一个基；

④设 U 和 W 都是 V 的非零子空间，如果 $U \subseteq W$，那么 $\dim U \le \dim W$；

⑤设 U 和 W 都是 V 的非零子空间，$U \subseteq W$，且 $\dim U = \dim W$，则 $U = W$。

那么，我们判断一组向量是否为基，根据定义需要①线性无关②线性空间中所有向量都能被其线性表示。若增加这组向量长度等于维数这一限定，则只需①②满足一个。（这告诉我们，证明需要从定义出发并且熟练运用所学结论）

3.4　向量的坐标

引入线性空间的基后便可以引入向量的坐标的概念。定义见教材 P72 定义 2.9，简单理解便是中学时期平面直角坐标系中我们取(0, 1)和(1, 0)作为平面的基，然后向量(x, y)的坐标便是(x, y)（注意这两个(x, y)一个表示向量一个表示坐标）。

关于向量的坐标，强调以下三点：

①求解坐标时，再次是高斯消元法的应用，采用$x_1\boldsymbol{\beta}_1 + x_2\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\beta}_n = \boldsymbol{b}$形式即可

②向量在自然基下的表示仍然是其本身；

③实际上向量坐标可以视为一种线性映射，教材 P73 上方的两条性质可以说明这一点。

3.5　维数公式 1

教材 2.6 节是*章节，考试要求并不太高，但是基本的概念需要掌握，并且其中的 P75 式 2-6 的维数公式非常重要。本节内容提要，大家可以按顺序自行回忆、推导：

①子空间的交与和的概念；

②子空间的交与和仍旧是子空间，并且子空间 V_1 与 V_2 的和是包含子空间 V_1 与 V_2 的最小子空间；

③直和、补的概念，以及 P76 定理 2.7 的直和分解定理；

④维数公式及其证明。**注意，该定理证明的方法非常重要，取基、扩充的方法是我们证明类似问题的一般方法！**

3.6 基础习题简述

注：前述内容中已介绍的判断线性相关性、判断一组向量是否为基以及求解向量坐标的方法，此处不再赘述。

类型 1 特殊题型——特殊的判断线性相关性的方法

此前介绍的判断线性向量相关性的方法是直接采用高斯消元法$x_1\boldsymbol{\beta}_1+x_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\beta}_n=0$的形式。而教材 P88 习题 11（2）则需要求导获得更多的方程，才能继续使用高斯消元法解决。

类似的题目还有证明 1，e^{λ_1}，e^{λ_2}($\lambda_1 \neq \lambda_2$且均不为 0)是线性无关的。

类型 2 求向量组的极大线性无关组及秩

一般方法见教材 P71 例中"通用而简便的方法"。**大致步骤为先列出方程组$\boldsymbol{x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_m\alpha_m=0}$，得到阶梯矩阵，没有主元素的列对应的向量去除即可。**原因是去除这些向量后的新方程组只有零解，故线性无关。

注意：求出的极大线性无关组不一定唯一，本材料 3.3 节结论 2 可以体现这一点。

相反的题型**将一组向量扩张为某一空间的基，实际上先将自然基或者其他简单的向量添加进向量组，判断线性相关性，线性无关则可以加入，线性相关则不可以（未来学习了行列式后可以采用行列式这一工具解决）。**

相关的题型还有：

①判断一个向量能否被一组向量线性表示且表示法是否唯一；

②判断向量组是否为基并求向量在给定基下的坐标；

③判断两个线性空间的和是否为直和，求两空间交、和、补空间的基（教材 P77 例 3）。

<u>类型三** 必考题型——结论判断正确性</u>

每年线性代数期末考试最后一题一定是给出四条结论，判断正确性，正确写出证明，错误给出反例。教材 P87 习题 10 给出了这类题型的一个示例，如 P91-92 习题 8、9 等习题的结论也可能考察。

这类题型考验大家对于概念和定理的理解程度，因此强调书上的定理证明的基本思想方法一定要掌握，这也是之前给出较多结论要求同学们自行证明的原因。除此之外，有些时候"见多识广"可能是应试方面的需求......

四、内积空间

4.1 内积空间基本内容简述

内积空间简而言之便是一般的线性空间上定义了内积运算得到的空间。其意义在于可以定义一种度量方法——度量向量的长度以及向量间的夹角。

学习内积时，如果觉得抽象可以从高中时学习的向量数量积入手。

内积运算定义见教材 P78 定义 2.12，记忆方法可以是"对称正定双线性"，这样便在 7 个字中囊括了四条性质。本课程中由于主要考虑实内积空间，因此对称性不需要刻意强调共轭对称。

除此之外，我们还可以证明：

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})+(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma})$$
$$(\boldsymbol{\alpha},\lambda\boldsymbol{\beta})=\lambda(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$$

此处提醒我们应善于利用已知的四条性质进行证明各种性质以及不等式。

定义 2.13 和 2.14 关于长度和夹角（并由此引出正交性）的定义是内积空间中的核心概念，其中关于夹角定义的合理性（余弦值绝对值小于等于 1）来源于定理 2.8（2）柯西-施

瓦茨不等式。

除此之外，还可以补充几个结论供大家自行证明，熟练内积性质：

①（勾股定理）设$\boldsymbol{\alpha}$和$\boldsymbol{\beta}$是 V 中的正交向量，则$|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}|^2=|\boldsymbol{\alpha}|^2+|\boldsymbol{\beta}|^2$

②（平行四边形恒等式）设$\boldsymbol{\alpha}$和$\boldsymbol{\beta}$是 V 中的两个向量，则

$$|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}|^2+|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}|^2=2(|\boldsymbol{\alpha}|^2+|\boldsymbol{\beta}|^2)$$

4.2　欧氏空间的单位正交基

单位正交基，首先是单位代表每个向量是单位长度，然后是每两个向量都是正交的。那么，两两正交的向量组一定线性无关吗？

（定理 2.9）在内积空间 $V(R)$中两两正交的非零向量组$B=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m\}$线性无关。

然后加上“设 $\dim V=n$，则 V 中任意 n 个线性无关的向量都是 V 的一个基”这一结论便可说明正交基的合理性。得到正交基后只需要每个基除以模长即可单位化。

我们只说明了其合理性，其必然存在性由定理 2.10 给出：内积空间 $V(R)$中恒有单位正交基。**注意：这一证明为构造性证明，因此给出了求单位正交基的一般方法，而施密特正交化属于考试必考内容，因此定理一定要熟练掌握！**施密特正交化分为两步，第一正交化，第二单位化。详细过程见教材，请务必掌握！

补充例题（抽象定义的内积）

我们在教材 P79 例 3 中介绍了 $R[x]_n$空间中的标准内积为定积分。本题中我们具体规定 $R[x]_3$上的内积如下，其中$p,q\in R[x]_3$：

$$(p,q)=\int_{-1}^{1}f(x)g(x)dx$$

求 $R[x]_3$上的一组单位正交基。（结果可以参考《线性代数应该这样学》）

最后，教材 P80 定理 2.9 及 P82 例 2 需要掌握。需要熟悉这类抽象的解题方式。例 2 的结论也应当掌握，在一些证明中也是常见的。

4.3　正交子空间 正交补

由于本节内容和教材 2.6 节一样，都是*章节，不属于会详细考察的内容，下面给出简略的回顾复习思路作为参考，**本节内容难以理解也可以考虑 1-3 维情形便于理解**。

①向量与空间的正交、线性空间之间的正交定义

②正交补的概念：①正交；②和空间为原线性空间

③证明正交补一定是补空间：①定义可知和空间就是原线性空间；②交为{0}（待证）

④正交补的唯一性与求法（**定理 2.11，此处声明正交补唯一，一般补空间不一定唯一，可以自己寻找例子，也可以参考教材 P115 习题 13（1）**）

注意定理 2.11 证明中一方面使用了扩基这一基本方法，同时利用了 P80 定理 2.9 及 P82 例 2 的方法，再次说明掌握本章证明需要多看教材......

由此再引申出一种题型：**求子空间的补**，我们考察以下两种情况：

①教材 P84 例，给出子空间的基，实际上目的在于找出剩余的正交基。采取的方法参考教材即可，即利用内积为 0 解出所需向量。

②子空间的以齐次线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0\\\qquad\cdots\cdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0\end{cases}$$

的解空间形式给出时：

（i）解方程后用①中的方法解得结果，但是这种方法需要解较多方程，比较复杂；

（ii）以往我们经常考虑方程的列向量简化表达$x_1\boldsymbol{\beta}_1+x_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\beta}_n=0$，此处我们

考虑行向量，记

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\cdots\\x_n\end{pmatrix}，\boldsymbol{\alpha}_i=\begin{pmatrix}a_{i1}\\a_{i2}\\\cdots\\a_{in}\end{pmatrix}$$

则方程组转化为（每行都为内积形式）

$$\begin{cases}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{x})=0\\(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{x})=0\\\qquad\cdots\cdots\\(\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{x})=0\end{cases}$$

由此结合正交补的定义可以很容易地看出，解空间的正交补就是由方程组行向量为基张成的线性空间。

设解空间为 S，则由维数公式可知

$$\dim S+\dim L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)=n$$

形象地理解这一公式，$\dim S$一方面是解空间的维数，另一方面也是自由未知量个数，于是 $\dim L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$实际上就是行简化阶梯矩阵的非零行个数。在第六章中我们还会再次回到这一结论。或许在这里大家就可以明显体会到我之前所说的本书的重要的目标在于解决线性方程组的解的结构的问题。

五、线性映射的基本概念（线性代数 I（H）课程核心——线性映射）

定义及其延伸题型：教材 P95 定义 3.1，可以采用 P95 式（3-1）或（3-2）**判断一个给定的映射是否为线性映射。**

线性映射的性质：（教材 P101）

（i）教材 P101 式（3-4）;

（ii）线性映射将线性相关的向量组映射为线性相关的向量组；注意其逆命题不一定成立。注意其逆否命题为：一向量组经线性映射后的向量组线性无关，则原向量组也线性无关。

注意教材上的 $\mathbf{0}_1$ 和 $\mathbf{0}_2$ 表明两个 0 向量来源于可能不同的线性空间，因此长度也可能不同（当然也可能来源于相同的线性空间，此时线性映射也称**线性变换**）。

线性映射的像和核：定义见教材 P101 定义 3.2。注意从线性空间 $V_1\to V_2$ 的线性映射σ的像和核分别是 V_2 和 V_2 的子空间（不难证明）。

教材 P102 **定理 3.1** 说明了线性映射是单射等价于只有作用于零向量时能使其结果为 0。这一定理在很多证明中有重要应用，应重点掌握。

题型：求解线性映射的像和核

求解核时策略较为基本，令经线性映射后的结果为 0 即可。求解像，给出两种方法：

①教材 P102 例 3 的方法;

②将出发空间的基代入线性映射，得到的结果的极大线性无关组即为像空间的基。原因在于线性相关的向量经线性映射后仍线性相关，因此只需要取基代入计算即可。

此类题型可能会增加求维数（秩）等，实际上没有什么变化。除此之外，教材 P115 习题 7、8 第二问也可以稍作练习。

线性映射的秩：定义见教材 P104 定义 3.4。需要强调的是，P105 **定理 3.2 将是一个极其重要的定理，无论是其结论或是这一定理的证明方法都将是接下来会多次见到的，因此请务必掌握！**接下来的定理 3.3 是自然的延伸，也应当熟记。

关于定理 3.4 和定理 3.5，学有余力的同学可以自行阅读，实际上学到矩阵的秩时这两个结论也有相应对应的结论，关于秩的相关证明此处不展开，实际上这类题目都可以分别从

线性映射或矩阵两个角度出发。定理 3.6 可以自己作为一个练习证明。

补充结论（也可参考教材 P115 习题 11）

不存在从维数低的线性空间到维数高的线性空间的满射。

证明方法①利用线性相关的向量经线性映射后仍线性相关的逆命题②维数公式很容易证明；这一结论是理解线性空间、线性映射的又一重要结论。

线性空间的同构：

定义见教材 P110 定义 3.5，注意以下三点：

①教材 2.5 节中介绍的坐标映射实际上就是一个同构映射，它在 n 维向量空间 V 和 F^n 之间建立双射，因此 n 维向量空间 V 同构于 F^n；

②同构映射将两空间的元素一一对应。可以证明，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$和$\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1),\sigma(\boldsymbol{\alpha}_2),\ldots,\sigma(\boldsymbol{\alpha}_m)$具有相同的线性相关性。这是本材料中线性映射的性质（ii）在同构映射下的扩展；

③**（定理 3.8）**两个**有限维**线性空间同构充分必要条件是其维数相等。这一定理的证明同样可以当作练习自己完成。

注：非常推荐大家完成第三章的所有习题（包括补充题），因篇幅有限不能一一列举各题。（去年吴爷爷班考察了 P117 习题 6）

补充：

①关于**线性变换**的一系列等价命题：设$\sigma\in L(V,V)$，则

$\ker\sigma=\{\mathbf{0}\}$等价于为$\sigma$单射等价于$\sigma$为满射等价于$\sigma$为双射等价于$\sigma$可逆等价于 $\mathrm{Im}\sigma=V$。

注意，证明是简单的，此处从略。

②（i）证明$\sigma\in L(V,V)$在某些条件下有 $\mathrm{Im}\sigma=\ker\sigma$时采用证明集合相等的证明方法即可；（ii）证明$\sigma\in L(V,V)$在某些条件下有 $V=\ker\sigma+\mathrm{Im}\sigma$只需证 $V\subset\ker\sigma+\mathrm{Im}\sigma$即可（另一半包含关系是显然的）。故只需证$\forall\boldsymbol{\alpha}\in V,\exists\boldsymbol{\alpha}_1\in\mathrm{Im}\sigma,\boldsymbol{\alpha}_2\in\ker\sigma$，使得$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$；

③练习：（i）设$\sigma\in L(V,V)$，证明 $\mathrm{Im}\sigma\subset\mathrm{Im}\sigma^2$ 的充分必要条件是 $V=\ker\sigma+\mathrm{Im}\sigma$

（ii）证明：设$\sigma\in L(V,V)$，若$\sigma^2=\sigma$，则 $V=\ker\sigma+\mathrm{Im}\sigma$

六、$L(V,W)$同构于$F^{\dim W\times\dim V}$

$L(V,W)$空间的定义以及运算都在教材 P103，证明这一空间是线性空间是简单的。我们的关键问题在于求解这一空间的维数，两种方法：

①教材 P108 定理 3.7（吴爷爷：找基的方法，我不指望你们能听懂，当然你们能听懂我也欢迎）；

②证明 $L(V,W)$同构于$F^{\dim W\times\dim V}$，接下来说明这一点，大致思路如下：

①证明矩阵及其加法、数乘运算构成线性空间，同时掌握其自然基形式；

②线性映射的矩阵表示。这一内容是本课程中最重要的内容之一，就本人而言，无论是线性代数 I（H）的吴爷爷还是线性代数 II（H）的大帝，黑板上都曾无数次出现相关内容。**可以参考教材 P153 习题 1 练习，若要提高难度可以参考教材 P270 习题 12。这类题目非常模式化，就是将出发空间的基代入线性映射，然后将所求结果用要求的基线性表示，最后按列组合成矩阵即可。**

③构造 $L(V,W)$到$F^{\dim W\times\dim V}$的同构映射。方法为将线性映射基下表示后，证明该线性映射为单射、满射即可。

$L(V,W)$同构于$F^{\dim W\times\dim V}$证明完成后，实际上很多关于线性映射的证明题只需要将线性映射改成矩阵，结论仍然正确，如补充例题：

设 A 时 n 阶方阵，证明：存在 n^2 次非零多项式 $f(x)$使得 $f(A)=0$。（教材 P117 习题 6）

七、关于矩阵的其他概念

7.1　矩阵乘法

矩阵乘法来源于线性映射的复合，可以自行回顾证明，此处从略。得到的矩阵乘法的规律为：乘号左侧矩阵第 i 行乘以右侧矩阵第 j 列得到乘积矩阵的第 i 行第 j 列元素。据此也可以回忆两个矩阵可以相乘的条件。

注意对角矩阵乘积仍为对角矩阵。上（下）三角矩阵乘积仍为上（下）三角矩阵，且结果的对角线元素仍为原矩阵对应位置相乘的结果。

注意矩阵乘法满足教材 P125 三条运算律，但矩阵乘法与初等代数运算存在以下差异：

①**矩阵乘法不一定满足交换律。**但是注意单位矩阵和任何矩阵相乘都是可交换的，因此求矩阵的幂次时，可以将其转化为$(A+\mu E)^n$（其中 E 为单位矩阵，μ为常数）类型，然后利用二项式展开即可。很多情况下 A 都会是幂零矩阵，此时结果为有限项。（**参考教材 P154 习题 11**）

②**$\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$ 且 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$ 不能推出 $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{O}$。**例如线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 有非零解，若 $\boldsymbol{B}$ 的各列均为方程非零解，则 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$。

③**消去律也不一定满足：**即 $AC=BC$ 不一定 $B=C$。原因在于$AC\ =\ BC\rightarrow A(B-C)=0$，由②知不一定 $B=C$。

7.2　可逆矩阵

可逆矩阵来源于可逆线性映射。定义见 P130 定义 4.5。回顾以下基本内容：

①逆矩阵是唯一的（回忆唯一性的反证法一般思路）

②**可逆矩阵一定是方阵**（有多种理解方法，可以从矩阵乘法入手，也可以从之后矩阵的行秩列秩入手）

③设$A,B\in M_n(F)$，若 $AB=E$，则必有 $BA=E$（则互为逆矩阵）。这一定理证明也可以不采用书上的方法，简述如下：

令$B=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)$，则$\boldsymbol{\beta}_i\in F^n$，下面说明$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$线性无关。

事实上，$x_1\boldsymbol{\beta}_1+x_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\beta}_n=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\cdots\\x_n\end{pmatrix}=0$

则$A(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\cdots\\x_n\end{pmatrix}=E\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\cdots\\x_n\end{pmatrix}=0\rightarrow\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\cdots\\x_n\end{pmatrix}=0$，得证。同时可以得到$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$是$F^n$的一组基，故可以张成所有向量，包括自然基，即自然基一定可以被表示为

$$e_i=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)\begin{pmatrix}c_{1\mathrm{i}}\\c_{2\mathrm{i}}\\\cdots\\c_{ni}\end{pmatrix}$$

故$E=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n)=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)(c_{ij})_{n\times n}$，故找到$C=(c_{ij})_{n\times n}$，使得 $BC=E$。

则 $A=AE=A(BC)=(AB)C=EC=C$，故 $BA=E$ 得证。

这一证明的方法（拆解某一矩阵的列为列向量）在其他证明中也很常用，因此可以掌握。$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$线性无关是本证明的一个附加产品。

④对角矩阵可以的充分必要条件：对角线上没有零及其逆矩阵的形式

⑤逆矩阵的运算性质：教材 P131 式 4-17——4-20。其中乘积的逆表明，可逆矩阵的积仍然是可逆矩阵。

几个补充性质：

①对于可逆矩阵，本资料 7.1 节所述②③都成立（即与可逆矩阵相乘得到零的矩阵一定是零矩阵以及可逆矩阵的乘法满足消去律），等式两边同时乘以 A 的逆矩阵即可证明（乘以逆矩阵也是常用证明方法），这两条将会在证明中经常使用；

②上（下）三角矩阵可逆要求对角线上元素都不为 0（充要条件，证明可以通过分块矩阵或借用行列式完成），上（下）三角矩阵逆矩阵仍为上（下）三角矩阵，且逆矩阵主对角元为原矩阵倒数。

③若 A、B 都可逆，且 $AB = BA$，则 A^{-1} 和 B，B 和 A^{-1} 以及 A^{-1} 和 B^{-1} 都可交换。（证明并不复杂，可以自行证明）

7.3 矩阵的转置

本节基本上过教材即可，注意定义以及运算规律类似于矩阵的逆但不完全相同（如加法法则，数乘法则不同），注意对称和反对称矩阵以及教材 P134 两个例子。

注意：一个矩阵一定可以被表示为一个对称矩阵和一个反对称矩阵的和的形式，证明方法类似于证明一个函数一定能表示为一个奇函数和一个偶函数的和。

7.4 初等变换与初等矩阵

三种初等行变换对应三种初等矩阵，列变换同理。三种初等变换左（右）乘矩阵是对矩阵做相应的初等行（列）变换（三种矩阵形式见教材 P136）。注意：

①初等矩阵都可逆，且逆矩阵都是同类初等矩阵（教材 P137）；

②矩阵 A 可逆当且仅当 $A = P_1P_2\cdots P_n$，其中 P_i 均为初等矩阵（教材 P137 定理 4.3 延伸）

7.5 分块矩阵

本节内容注意：

①分块矩阵加法、数乘、乘法的规则（与一般矩阵运算类似），注意教材给出的各个例子都应当掌握；

②注意分块矩阵求转置是“大转置小转置都要转置”；

③分块矩阵求逆练习：

（i）证明$X = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ A_2 & A_3 \end{pmatrix}$可逆当且仅当 A_1、A_3 可逆，并求其逆矩阵；

提示：设出逆矩阵的分块形式计算即可，注意利用之前已推导的关于可逆矩阵的结论；

（ii）①的推论：下三角矩阵可逆当且仅当对角线上元素均不为 0（注意数学归纳法）；

（iii）求$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix} 0 & A_1 \\ A_2 & A_3 \end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix} 0 & A_1 \\ A_2 & 0 \end{pmatrix}$的逆矩阵。

7.6 基的变换矩阵与坐标变换

注意以下内容：

①过渡矩阵的定义以及过渡矩阵一定可逆（原因在于若不可逆则基会线性相关）

②**定理 4.10** 说明了**同一个向量**在**同一个线性空间**的**不同基**下的坐标的关系，而回顾教材 P128 **定理 4.1** 则是**一个向量及其经线性映射后的结果**分别在**两个线性空间基**下的坐标的关系。注意区分这两个定理

7.7 矩阵的秩 相抵标准形

回顾之前所学习的求向量组的极大线性无关组的方法，我们通过初等行变换进行高斯消元，但最终却得到了列向量的极大线性无关组。那时便可以思考矩阵的行与列是否有什么关联。教材 4.8 便给出了解答。

本节对自己有一定要求的同学应掌握其中各个定理的证明思路，如果感觉困难的同学也可以尽力理解证明，然后会运用结论即可。

①矩阵的三个秩的定义：矩阵的秩（对应的线性映射的秩）、矩阵的行秩和列秩；

②矩阵的秩等于其行秩和列秩；

③初等行变换和初等列变换不改变矩阵的秩→秩为 r 的矩阵的相抵标准型

④定理 4.8；

⑤定理 4.9 的结论及其延伸：

（i）设 A 为 $m\times n$ 矩阵，B 为 $n\times s$ 矩阵，则$r(AB)\geq r(A)+r(B)-n$

（ii）若 $AB=O$，则$n\geq r(A)+r(B)$（（i）的拓展）

（iii）$r\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}=r(A)+r(B)$，$r\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}\geq r(A)+r(B)$

7.8　求矩阵的逆的两种方法

教材 P132 例 3 和 P138 例给出了两种求逆矩阵的方法，注意这两种方法的正确性教材都有解释，并且计算时应当减少计算错误。

除此之外，有时会出现 P133 例 4 这类给出一个关于矩阵的等式，我们要做的就正如例 3 一般经过一系列变换在等式右端得到初等矩阵即可。