线代期中复习

周健均

2022 年 10 月 30 日

目录

1 2022.10.26 刘康生小测

1.1 Gauss 消元法

将方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1.1.1}$$

用**增广矩阵**表示如下：

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \tag{1.1.2}$$

高斯消元法会对增广矩阵进行初等行变换，即

1. 倍乘行变换：以非零常数 c 乘矩阵的某一行
2. 倍加行变换：将矩阵的某一行乘以非零常数 c 后加到另一行
3. 对换行变换：将矩阵的某两行对换位置

以上行变换的本质是对增广矩阵左乘这些初等行变换的对应矩阵 $E_i(c), E_{ij}(c), E_{ij}$，详见 4.7 节。

高斯消元法最后会化得一个**行简化阶梯形矩阵**，要求：

1. 全零行在最下面
2. 非全零行中，每一行第一个非零元素在上一行第一个非零元素的右边
3. 每行第一个非零元素为 1，并且这一列除了这个 1 之外其他元素都是 0

如果只满足前两条要求的矩阵称为**阶梯形矩阵**。每行第一个非零元素称为**主元**，设其在第 j 列，则 x_j 就是**基本未知量**。除了基本未知量，如果还剩下未知量，就被称为**自由未知量**。

1. 如果出现矛盾方程，即行简化阶梯形矩阵中系数矩阵部分出现全零行，但是对应的增广部分非零，则无解。
2. 如果没有矛盾方程，当存在自由未知量时，就有无穷多解。
3. 如果没有矛盾方程，且所有变量都是基本未知量时，方程有唯一解。

有无穷多解的情况下，自由未知量的数量和解空间的维数相同，更进一步的分析具体会在第 6 章讲（到时候我还会继续授课，乐）。

1.2 例题：线性方程组解的情况

讨论 a,b 取何值时，方程组有解或无解，写出解的情况。(40’)

$$\begin{cases} ax_1+x_2+x_3=4 \\ x_1+bx_2+x_3=3 \\ x_1+2bx_2+x_3=4 \end{cases} \tag{1.2.1}$$

解：Gauss 消元。

$$\left(\begin{array}{ccc:c} a & 1 & 1 & 4 \\ 1 & b & 1 & 3 \\ 1 & 2b & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{(3)-(2)} \left(\begin{array}{ccc:c} a & 1 & 1 & 4 \\ 1 & b & 1 & 3 \\ 0 & b & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(2)-(3),(1)\leftrightarrow(2)} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ a & 1 & 1 & 4 \\ 0 & b & 0 & 1 \end{array}\right) \\ \xrightarrow{(2)-a\times(1)} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1-a & 4-2a \\ 0 & b & 0 & 1 \end{array}\right) \tag{1.2.2}$$

先考虑 $b=0$，则最后一行为矛盾方程，方程组无解。于是再考虑 $b\neq 0$，有

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1-a & 4-2a \\ 0 & b & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(3)-b\times(2)} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1-a & 4-2a \\ 0 & 0 & b(a-1) & 1-2b \end{array}\right) \tag{1.2.3}$$

显然此时应该考虑 $a-1$ 是否为 0。若 $a=1$，如果 $1-2b\neq 0 \iff b\neq \frac{1}{2}$，那么第三条方程就是矛盾方程，无解；若 $b=\frac{1}{2}$，那么第三条方程就是冗余方程，得到

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \tag{1.2.4}$$

这表示方程组

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1.2.5}$$

即有

$$\begin{cases} x_1+x_3=2 \\ x_2=2 \end{cases} \tag{1.2.6}$$

记自由变量 $x_3=t$，就有

$$\begin{cases} x_1=2-t \\ x_2=2x_3=t \end{cases} \tag{1.2.7}$$

则 $a=1,b=\frac{1}{2}$ 下有解

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2-t \\ 2 \\ t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -t \\ 0 \\ t \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}=t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1.2.8}$$

也就是写作 $\boldsymbol{x}=t(-1,0,1)^{\mathrm{T}}+(2,2,0)^{\mathrm{T}}$。

下面考虑 $a\neq 1$，那么就要硬解了。

$$\begin{aligned}&\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&1&2\\0&1&1-a&4-2a\\0&0&b(a-1)&1-2b\end{array}\right)\xrightarrow{(3)/b,(2)+(3)}\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&1&2\\0&1&0&\frac{1}{b}+2-2a\\0&0&a-1&\frac{1}{b}-2\end{array}\right)\\&\xrightarrow{(3)/(a-1),(1)-(3)}\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&0&2+\frac{2b-1}{b(a-1)}\\0&1&0&\frac{1}{b}+2-2a\\0&0&1&-\frac{2b-1}{b(a-1)}\end{array}\right)\end{aligned}\tag{1.2.9}$$

则有

$$\boldsymbol{x}=\left(2+\frac{2b-1}{b(a-1)},\frac{1}{b}+2-2a,-\frac{2b-1}{b(a-1)}\right)^{\mathrm{T}}\tag{1.2.10}$$

综上，有

$$\text{原方程}\begin{cases}\text{有无穷多解}\boldsymbol{x}=t(-1,0,1)^{\mathrm{T}}+(2,2,0)^{\mathrm{T}}, & a=1,b=\frac{1}{2}\\ \text{有唯一解}\boldsymbol{x}=\left(2+\frac{2b-1}{b(a-1)},\frac{1}{b}+2-2a,-\frac{2b-1}{b(a-1)}\right)^{\mathrm{T}}, & a\neq 1,b\neq 0\\ \text{无解}, & b=0\text{或}a=1,b\neq\frac{1}{2}\end{cases}\tag{1.2.11}$$

1.3　线性相关性、基和秩

在这里我不会复读书上的诸多定理。让我们去理解一下线性相关是什么。一个向量组如果线性相关，可以认为存在多余的向量，因为它必然存在一个向量可以被组内其他向量线性表示 (P68, 定理 2.4)。

我们如果把这些“冗余”的向量从向量组中排除，直到向量组线性无关，就可以认为没有“冗余”信息了。这时也就得到了一个**极大线性无关组**，这个极大线性无关组的线性扩张和原来的向量组是一样的，因为我们去掉的只是多余的向量。

书本 P71-P72 就介绍了利用高斯消元法求极大线性无关组的一种方便的方法。

2.4 节的**秩**就衡量了向量组中“不冗余”的向量个数。这里我们考虑的是一个子空间的子集 S 的秩，S 可以看成含有限或无限的向量的向量组，那我们求 S 的秩的过程其实就是去除大量“冗余”向量，寻求它的一个极大线性无关组。因为去掉的“冗余”向量都能被这个极大线性无关组线性表示，所以 S 中所有向量都能被它线性表示，当 S 是一个子空间时，这个极大线性无关组就成为 S 的**基**。

有了基之后，坐标也就有意义了。坐标的本质就是向量被基进行线性表示后，把系数专门拿出来简单表示。从这个角度我们也更容易理解线性扩张，求线性空间的基就是去建立空间的一个坐标轴，而求线性扩张就是根据坐标轴重建线性空间。

当然，可能是一个包含“冗余”向量的线性相关的向量组进行线性扩张，但我们需要关注的只是其中的极大线性无关组，因此我们往往也会先求极大线性无关组（得到坐标轴）然后进行线性扩张。

1.4　例题：线性表示

求方程 $\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{2x^2+x+5}=\sqrt{x^2-3x+13}$ 的实数解 (20')

提示：利用 $x^2+x+1, 2x^2+x+5, x^2-3x+13$ 的线性相关性。

解：设 $a=x^2+x+1, b=2x^2+x+5, c=x^2-3x+13$，注意到有 $7a-4b+c=0$，则

$$c=(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=-7a+4b \Rightarrow (4\sqrt{a}+3\sqrt{b})(2\sqrt{a}-\sqrt{b})=0 \tag{1.4.1}$$

$\forall x\in\mathbb{R}$，有 $\sqrt{a}>0, \sqrt{b}>0 \Rightarrow 4\sqrt{a}+3\sqrt{b}>0$，因此有 $2\sqrt{a}=\sqrt{b}$，即

$$2x^2+3x-1=0 \Rightarrow x=\frac{-3\pm\sqrt{17}}{4} \tag{1.4.2}$$

P.S. 设

$$\lambda_1(x^2+x+1)+\lambda_2(2x^2+x+5)+\lambda_3(x^2-3x+13)=0 \tag{1.4.3}$$

对 $\forall x\in\mathbb{R}$ 成立，即

$$\begin{pmatrix}1&2&1\\1&1&-3\\1&5&13\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \tag{1.4.4}$$

初等行变换可以得到

$$\begin{pmatrix}1&2&1\\1&1&-3\\1&5&13\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-7\\0&1&4\\0&0&0\end{pmatrix} \tag{1.4.5}$$

因此可以取 $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)^{\mathrm{T}}=(7,-4,1)^{\mathrm{T}}$。

1.5 线性空间，子空间及其交、和、直和、补

线性空间和子空间的注意点我觉得 wyy 的复习资料写得非常好：

线性空间定义中的关键概念：

①**非空**集合 V，域 F（线性空间可以记作 $V(F)$）；

②定义**加法**运算：<V，+>构成 Abel 群；

③定义**数乘**运算：满足教材 P59 定义 2.1 四条性质；

④**特别注意：加法和数乘运算必须封闭**，即 V 中元素经过这两种运算后的结果一定仍旧在 V 中。

线性子空间：

定义见教材 P62 定义 2.3。此处应重点掌握其判断方法（定理 2.1），即**线性空间 $V(F)$ 的非空子集 W 为 V 的子空间的充分必要条件是 W 对于 $V(F)$的线性运算封闭。**

遇到证明线性空间的题，对照着相关性质和注意点一条条验证就行；证明子空间，一般都会说明或者暗示已经是一个线性空间的子集，那么验证对线性运算封闭即可。

子空间的交，就是同时属于两个子空间的向量的集合。子空间的和，可以想象为两个子空间的基合并成一个新的向量组，去掉冗余向量后剩下的极大线性无关组张成的空间。如果没有冗余向量需要去掉，那就说明有

$$\dim W_1+\dim W_2=\dim(W_1+W_2) \tag{1.5.1}$$

结合**维数公式**

$$\dim W_1+\dim W_2=\dim(W_1+W_2)+\dim(W_1\cap W_2) \tag{1.5.2}$$

我们就能知道 $\dim(W_1 \cap W_2) = 0, W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$。因此此时的 $W_1 + W_2$ 就是直和 $W_1 \oplus W_2$。

知道了直和，那么就明白了互补空间，即直和情况下 W_1 和 W_2 构成互补子空间。**补空间并不唯一**，这是违反第一感觉的几何直觉的，需要重视。

交、和与直和相关的题目不能太相信自己的几何直觉，要根据定义严格地去推导，因为初学者的几何直觉往往容易出错。

1.6 例题：子空间问题

设 W 为 $\mathbb{R}$ 上实值函数的全体，V_1, V_2 分别为偶函数和奇函数的全体。求证：

(1)V_1, V_2 是 W 的子空间。(20')

(2)$W = V_1 \oplus V_2$。(20')

解：(1)$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, f_1, f_2 \in V_1, g_1, g_2 \in V_2$，有

$$(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(-x) = \lambda_1 f_1(-x) + \lambda_2 f_2(-x) = \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) = (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(x) \tag{1.6.1}$$

$$(\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2)(-x) = \lambda_1 g_1(-x) + \lambda_2 g_2(-x) = -\lambda_1 g_1(x) - \lambda_2 g_2(x) = -(\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2)(x) \tag{1.6.2}$$

因此 $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 \in V_1, \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 \in V_2$，可知 V_1, V_2 对于线性运算封闭，故是 W 的子空间。

(2) 首先证明 $W = V_1 + V_2$，然后证明直和。

由于 V_1, V_2 是 W 的子空间，有 $V_1 + V_2 \subseteq W$。而 $\forall f \in W$，有

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2} \tag{1.6.3}$$

容易验证 $\dfrac{f(x) + f(-x)}{2}, \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$ 分别是偶函数和奇函数，所以 $f \in V_1 + V_2$，可知 $W \subseteq V_1 + V_2$。综上得证 $W = V_1 + V_2$。

证明 $V_1 + V_2$ 是直和，只需证 $V_1 \cap V_2 = \{\mathbf{0}\}$。首先我们明确这个零元 $\mathbf{0}$(加法单位元) 就是值恒为 0 的函数 $f(x) = 0$。

$\forall f \in V_1 \cap V_2, x \in \mathbb{R}$，有

$$f(-x) = f(x), f(-x) = -f(x) \Rightarrow f(x) = -f(x) \Rightarrow f(x) = 0 \tag{1.6.4}$$

因此 $V_1 \cap V_2 = \{\mathbf{0}\}$。综上得证 $W = V_1 \oplus V_2$。

P.S. 如果将 $\forall f \in W$ 构造为奇函数和偶函数的和？如果不知道这个结论，那么也可以推。设 $f = f_1 + f_2$，$f_1 \in V_1, f_2 \in V_2$，这样就有

$$\begin{cases} f_1(x) + f_2(x) = f(x) \\ f_1(x) - f_2(x) = f_1(-x) + f_2(-x) = f(-x) \end{cases} \tag{1.6.5}$$

就可以解得

$$f_1 = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, f_2 = \frac{f(x) - f(-x)}{2} \tag{1.6.6}$$

2 教材及历年卷部分习题

2.1 例题：Gauss 消元 + 基的理解

【P89 T19(1)(3)】求以下子空间的一组基。

$$\begin{aligned} &W_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1 + x_2 + x_3 = 0, x_1 - x_2 + x_3 = 0\} \\ &W_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 | x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0\} \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

解：对 W_1 进行 Gauss 消元。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.1.2}$$

令 $x_3 = t$，有 $x_1 = -t, x_2 = 0$。可得 $x = t(-1, 0, 1)^{\mathrm{T}}$，$W_1$ 的基为 $(-1, 0, 1)^{\mathrm{T}}$。

对 W_2，令 $x_2 = t_1, x_3 = t_2, x_4 = t_3$，有 $x_1 = t_1 + t_2 - t_3$，得到 $x = t_1(1, 1, 0, 0)^{\mathrm{T}} + t_2(1, 0, 1, 0)^{\mathrm{T}} + t_3(-1, 0, 0, 1)^{\mathrm{T}}$，最后有 W_2 的基为 $(1, 1, 0, 0)^{\mathrm{T}}, (1, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 1)^{\mathrm{T}}$。

2.2 例题：Gauss 消元 + 直和理解

【2020 吴志祥班期中考 T1 改编】设方程组：

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 7x_4 = 0 \\ ax_1 + 3x_2 - 4x_3 + 6x_4 = 0 \end{cases} \tag{2.2.1}$$

的解空间为 V_1 ，方程组：

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + bx_4 = 0 \\ 5x_1 + 7x_2 - 9x_3 + 13x_4 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases} \tag{2.2.2}$$

的解空间为 V_2 ，是否存在 a，$b \in \mathbb{R}$，使得 $\mathbf{R}^4 = V_1 \oplus V_2$？如果存在，请求出可行的 a, b；如果不存在，请证明。

解：

第一个方程组系数矩阵初等行变换得

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{6} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & a-3 & 9-3a \end{pmatrix} \tag{2.2.3}$$

则 $a = 3$ 时有

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, x_3, x_4)^{\mathrm{T}} &= t_1 \left(\frac{1}{6}, \frac{7}{6}, 1, 0\right)^{\mathrm{T}} + t_2 \left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 0, 1\right)^{\mathrm{T}} \\ V_1 &= L\big((1, 7, 6, 0)^{\mathrm{T}}, (1, 3, 0, -2)^{\mathrm{T}}\big) \end{aligned} \tag{2.2.4}$$

$a \neq 3$ 时有

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, x_3, x_4)^{\mathrm{T}} = t\,(0, 2, 3, 1)^{\mathrm{T}} \\ V_1 = L\big((0, 2, 3, 1)^{\mathrm{T}}\big) \end{aligned} \tag{2.2.5}$$

同理对第二个方程系数矩阵初等行变换后有

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 12 & -14 & \frac{49}{3} \\ 0 & 6 & -7 & b+\frac{8}{3} \end{pmatrix} \tag{2.2.6}$$

根据设变换后系数矩阵为 B，根据 $r(B) \geqslant 1, r(B) + \dim V_2 = 3$ 有 $\dim V_2 \leqslant 2$。

由于 $\dim V_1 = 1$ 或 2，则根据 $\mathbf{R}^4 = V_1 \oplus V_2$，有

$$\dim V_1 + \dim V_2 = \dim(V_1 + V_2) + \dim(V_1 \cap V_2) = 4 + 0 = 4 \tag{2.2.7}$$

可以确认 $\dim V_1 = \dim V_2 = 2$。那么

$$\begin{aligned} a = 3 \\ 2\left(b + \frac{8}{3}\right) = \frac{49}{3} \Rightarrow b = \frac{11}{2} \\ V_2 = L\left((1, 7, 6, 0)^{\mathrm{T}}, (25, 49, 0, -36)^{\mathrm{T}}\right) \end{aligned} \tag{2.2.8}$$

显然有 $V_1 \cap V_2 = L((1, 7, 6, 0)^{\mathrm{T}})$，与直和矛盾。所以不存在对应的 a，b。

实际上本题应当有第二种解法，但因为本题无法解出符合题意的解（即没有满足直和的解）所以下面这种直接联立的方式失效：

由于 $\mathbf{R}^4 = V_1 \oplus V_2$，且解向量均为四维向量，从而 $V_1 \cap V_2 = 0$，这表明方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 7x_4 = 0 \\ ax_1 + 3x_2 - 4x_3 + 6x_4 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + bx_4 = 0 \\ 5x_1 + 7x_2 - 9x_3 + 13x_4 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases} \tag{2.2.9}$$

只有零解，其系数矩阵经过初等行变换后为：

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & -7 & 9 \\ 0 & a+3 & -a-4 & a+6 \\ 0 & 6 & -7 & b+4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.2.10}$$

且由方程组只有零解可知，$r(A)=4$，我们可以选择第 1、5 行作为 $\mathbf{R}^4$ 的即的其中两个向量，然后 2-4 行中三个向量有且仅有两个线性无关即可。我们考察 2-4 行，发现 $a=3$ 或 $b=5$ 时，第 3、4 行将与第二行一致，故我们可以探究以下两种情况：

1. $a=3$ 且 $b\neq 5$ 时：$\dim V_1=2$，则要求 $\dim V_2=2$，故 $b=\frac{11}{2}$；2. $a\neq 3$ 且 $b\neq 5$ 时：$\dim V_1=1$，且 $\dim V_2=1$，不合要求，舍去。

综上所述，$a=3,\ b=\dfrac{11}{2}$。

2.3 内积和正交

记住内积空间定义的四条要求：对称性、正定性、第一个位置的加性、第一个位置的数乘性质。在实空间中，由于对称性的存在，第一个位置的加性和数乘其实在第二个位置也无所谓。在复空间中，对称性变成了共轭对称性，就需要严格保证是第一个位置。

在内积空间中可以定义向量的长度

$$|\alpha|=\sqrt{(\alpha,\alpha)} \tag{2.3.1}$$

内积空间中还有很多性质，关注 P79 定理 2.8，注意是因为 Cauchy-Schwarz 不等式才定义出了角度。随后又有了勾股定理。内积空间中这些性质的部分可以作为一个了解，不是考试的重点，关键是内积空间的四条定义性质。

之前讲到基可以认为是线性空间的一个坐标系，学过高中空间解析几何建系大法的我们应该清楚有时候我们会根据几何体的特殊情况建立非直角坐标系，甚至单位长度也不是 1。单位正交基就相当于单位长度是 1 的直角坐标系，各坐标轴之间成直角。最常用的单位正交基就是自然基，其他情况下我们要通过一组基获得一组单位正交基需要采用 P82 的 **Schmidt 正交化**：

$$\beta_1=\alpha_1,\quad \beta_i=\alpha_i-\sum_{j=1}^{i-1}\frac{(\alpha_i,\beta_j)}{(\beta_j,\beta_j)}\beta_j,\quad i=2,\cdots,n \tag{2.3.2}$$

注意**单位化**。建议先将全部 β 按照以上过程求完之后再一起进行单位化，不要算一个单位化一个，这样容易产生大量分数和根号运算。

两个子空间相互正交，等价于两个空间中各取一个向量，两个向量正交。由于正交对应内积为 0，根据内积的正定性，W_1,W_2 如果相互正交，那么 W_1+W_2 就是直和 $(W_1\oplus W_2)$。（参考 P83）

直和得到全空间 V 之后，就可以定义补空间。由于正交，此时的补空间就称为**正交补**。补空间不唯一，正交补空间也不唯一。

根据 wyy 的判断，正交补不太容易考。因此 2.7 至 2.9 推荐必须掌握的内容是内积空间 4 条定义性质和 Schmidt 正交化。

2.4 例题：基，内积与 Schmidt 正交化

【2021 期末】设 $V=\mathbb{R}^{2\times 2}$ 是按矩阵加法和数乘构成的实数域上的线性空间。

(1) 验证下列向量组构成 V 的一组基：

$$B=\left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}\right\} \tag{2.4.1}$$

(2) 在 V 上定义运算

$$\sigma\left((a_{ij})_{2\times 2},(b_{ij})_{2\times 2}\right)=a_{11}b_{11}+a_{12}b_{12}+a_{21}b_{21}+a_{22}b_{22} \tag{2.4.2}$$

验证 σ 是 V 上一个内积，使得 V 成为一个欧氏空间。

(3) 将 Schmidt 正交化过程用于 B 求出 V 的一组单位正交基。

解：

(1) $\forall v=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\in V$，有

$$v=(a-c)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}+(b-c)\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}+(c-d)\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}+d\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.4.3}$$

因此 B 构成 V 的一组基。(2) 验证内积的四条性质。$\forall (a_{ij})_{2\times2},(b_{ij})_{2\times2},(c_{ij})_{2\times2}\in\mathbb{R}^{2\times2},\ \lambda,\mu\in\mathbb{R}$

1. 交换性质：

$$\sigma\left((a_{ij})_{2\times2},\ (b_{ij})_{2\times2}\right)=\sum_{i,j\in\{1,2\}}a_{ij}b_{ij}=\sum_{i,j\in\{1,2\}}b_{ij}a_{ij}=\sigma\left((b_{ij})_{2\times2},\ (a_{ij})_{2\times2}\right) \tag{2.4.4}$$

2. 加法性质：

$$\begin{aligned}\sigma\left((a_{ij})_{2\times2}+(b_{ij})_{2\times2},\ (c_{ij})_{2\times2}\right)&=\sum_{i,j\in\{1,2\}}(a_{ij}+b_{ij})c_{ij}\\&=\sum_{i,j\in\{1,2\}}a_{ij}c_{ij}+\sum_{i,j\in\{1,2\}}b_{ij}c_{ij}\\&=\sigma\left((a_{ij})_{2\times2},\ (c_{ij})_{2\times2}\right)+\sigma\left((b_{ij})_{2\times2},\ (c_{ij})_{2\times2}\right)\end{aligned} \tag{2.4.5}$$

3. 数乘性质：

$$\sigma\left(\lambda(a_{ij})_{2\times2},\ (b_{ij})_{2\times2}\right)=\sum_{i,j\in\{1,2\}}(\lambda a_{ij})b_{ij}=\lambda\sum_{i,j\in\{1,2\}}a_{ij}b_{ij}=\lambda\sigma\left((a_{ij})_{2\times2},\ (b_{ij})_{2\times2}\right) \tag{2.4.6}$$

4. 正定性：

$$\sigma\left((a_{ij})_{2\times2},\ (a_{ij})_{2\times2}\right)=\sum_{i,j\in\{1,2\}}a_{ij}^2\geqslant 0 \tag{2.4.7}$$

当且仅当 $a_{ij}=0,\ i,j\in\{1,2\}$ 时取等，即 $(a_{ij})_{2\times2}=0$ 时取等。

(3) 令

$$\alpha_1=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ \alpha_2=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ \alpha_3=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ \alpha_4=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.4.8}$$

设 $B_2=\{\beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3,\ \beta_4\}$ 是 Schmidt 正交化得到的正交基（先不单位化），则

$$
\begin{aligned}
&\beta_1=\alpha_1\\
&\beta_2=\alpha_2-\frac{\sigma(\alpha_2,\beta_1)}{\sigma(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=\alpha_2\\
&\beta_3=\alpha_3-\frac{\sigma(\alpha_3,\beta_1)}{\sigma(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{\sigma(\alpha_3,\beta_2)}{\sigma(\beta_2,\beta_2)}\beta_2=\alpha_3-\alpha_1-\alpha_2=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}\\
&\beta_4=\alpha_4-\frac{\sigma(\alpha_4,\beta_1)}{\sigma(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{\sigma(\alpha_4,\beta_2)}{\sigma(\beta_2,\beta_2)}\beta_2-\frac{\sigma(\alpha_4,\beta_3)}{\sigma(\beta_3,\beta_3)}\beta_3=\alpha_4-\alpha_1-\alpha_2-\beta_3=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{2.4.9}
$$

发现已经是单位正交基了，那么就已经是最终答案。（如果没有这么凑巧的话，还是需要进行单位化的）

2.5 线性映射的定义，像与核

证明线性映射 σ 是 $V_1(\mathbb{R})$ 到 $V_2(\mathbb{R})$ 的线性映射，只需要证明 $\forall\lambda,\mu\in\mathbb{R},\alpha,\beta\in V_1$ 有

$$\sigma(\lambda\alpha+\mu\beta)=\lambda\sigma(\alpha)+\mu\sigma(\beta)\tag{2.5.1}$$

也等价于证明

$$\sigma(\lambda\alpha)=\lambda\sigma(\sigma),\quad \sigma(\alpha+\beta)=\sigma(\alpha)+\sigma(\beta)\tag{2.5.2}$$

定义核 $\mathrm{Ker}(\sigma)$ 和像 $\sigma(V_1)$ 如下：

$$
\begin{aligned}
\sigma(V_1)&=\{\beta|\beta=\sigma(\alpha),\alpha\in V_1\}\\
\mathrm{Ker}(\sigma)&=\{\alpha|\sigma(\alpha)=\mathbf{0}_2,\alpha\in V_1\}
\end{aligned}
\tag{2.5.3}
$$

根据线性映射的定义，很容易证明它们对线性运算封闭 (P102)，那么就证明核和像就是核空间与像空间。这里有一个重要的定理 (P102 定理 3.1)，

$$\sigma\text{是单射}\iff \mathrm{Ker}(\sigma)=\{\mathbf{0}_1\}\tag{2.5.4}$$

一般情况下，通过这个定理证明单射比按照定义证明单射更加容易。

2.6 例题：线性映射的像与核

【P102 例 3】已知 $\mathbb{R}^3$ 到 $\mathbb{R}^2$ 的映射 σ 为：

$$\sigma(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2,x_2-x_3)\tag{2.6.1}$$

试求 $\mathrm{Ker}\sigma$ 和 $\sigma(\mathbb{R}^3)$

解：

$$
\begin{aligned}
\sigma\left(x_1,x_2,x_3\right)&=\left(x_1+x_2,x_2-x_3\right)\\
&=x_1(1,0)+x_2(1,1)+x_3(0,-1).
\end{aligned}
\tag{2.6.2}
$$

记 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0)\ \boldsymbol{\alpha}_2=(1,1),\boldsymbol{\alpha}_3=(0,-1)$ ，可知 $\sigma(\mathbb{R}^3)=L\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$，$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3\}$ 显然是 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$ 的极大线性无关组, 所以

$$\sigma\left(\mathbf{R}^{3}\right)=L\left(\boldsymbol{\alpha}_{1}, \boldsymbol{\alpha}_{3}\right)=\mathbf{R}^{2}, \tag{2.6.3}$$

即 σ 是 $\mathbf{R}^3$ 到 $\mathbf{R}^2$ 的满射. 再由 $\operatorname{Ker}\sigma=\{(x_1,x_2,x_3)\mid\sigma(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{\theta}\}$ ，可知 σ 的核是齐次线性方程组: $x_1+x_2=0; x_2-x_3=0$ 的解空间 S ，易见 $S=L(\boldsymbol{\alpha})$ ，其中 $\boldsymbol{\alpha}=(-1,1,1)$, 故 Ker $\sigma=L(\boldsymbol{\alpha})$.

在这里我们简单地引入线性映射的矩阵表示：我们考虑矩阵 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$，满足

$$A\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\sigma(x_1,x_2,x_3)=\begin{bmatrix}x_1+x_2\\x_2-x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} \tag{2.6.4}$$

在第 4 章，我们会具体证明 A 和 σ 的等价性。但在这里，我们就已经可以看出 σ 对向量 $(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$ 所做的与 A 对它所做的并没有区别了。在这种意义下，求解像空间实质上就是求解 A 的所有列向量的线性扩张，求解核空间就是求解 $Ax=0$ 的解空间（高斯消元法）。

2.7 线性映射的运算，线性映射基本定理与同构

线性映射可以进行加、复合、数乘、逆等运算，在进一步学习了矩阵和线性映射的等价性后我们就可以知道这对应矩阵的加、乘、数乘、求逆的运算。证明它们运算后依然是线性映射是比较简单的，可以按照书上的思路证明一下保证自己掌握这种基本题型。

因为线性映射对加法和数乘封闭，就定义了线性空间 $L(V_1,V_2)$，即所有从线性空间 V_1 到线性空间 V_2 的线性映射也构成一个线性空间。注意 $\dim L(V_1,V_2)$ 的维数是 $\dim V_1$ 和 $\dim V_2$ 的乘积 (P108 定理 3.7)。可以大概只记住这个结论，因为这个部分打了两个星号，但是 2020 年的 wyy 期中考了这个东西。

线性映射基本定理非常重要，见习题 3.7。这里也定义了线性映射的秩的概念，即像空间的维数。这里还给出了一系列线性映射的秩的不等式，这一块理解非常困难，建议好好看书，学习课本的证明方法。如果没能弄懂也不要急，虽然本次授课不会具体讲解秩相关的内容，但是之后的学长应该会讲解（以及我的下一次授课应该会讲解）。

课本是在讲解了秩之后讲了重要的定理 3.3(P105) 的。在 $\sigma\in L(V_1,V_2),\dim V_1=\dim V_2=n$ 的前提下，以下四个条件等价：

1. $r(\sigma)=n$(σ 满秩)
2. σ 是单射
3. σ 是满射
4. σ 可逆

最后是线性空间的同构。同构，就是“结构相同”，两个线性空间同构被定义为存在同构映射，也就是线性的双射。这里有一个重要定理 (P111 定理 3.8)，有限维线性空间同构等价于维数相同。这就方便我们在维数有限的范围内理解了同构的本质，无需再去构建同构映射。

有了定理 3.8 之后，回看定理 3.3，就可以发现其前提条件就是 V_1 和 V_2 同构，因此 σ 才会有这么好的性质。

2.8 例题：同构映射

【2021 刘康生期中】设 $B=[\beta_1,\cdots,\beta_n]$ 是 $V(\mathbb{R})$ 的一组基，$T\in L(V)$，有

$$
\begin{gathered}
T(\beta_i)=\beta_{i+1},\quad i=1,\ldots,n-1\\
T(\beta_n)=\sum_{i=1}^{n}a_i\beta_i
\end{gathered}
\tag{2.8.1}
$$

求在什么条件下，T 是同构映射。

解：

$\forall v\in V$，$\exists b_1,\cdots,b_n$，使得 $v=\sum\limits_{i=1}^{n}b_i\beta_i$。则

$$
T(v)=T\left(\sum_{i=1}^{n}b_i\beta_i\right)=\sum_{i=1}^{n}b_iT(\beta_i)=\sum_{i=1}^{n-1}b_i\beta_{i+1}+b_n\sum_{i=1}^{n}a_i\beta_i=a_1b_n\beta_1+\sum_{i=2}^{n}(a_ib_n+b_{i-1})\beta_i \tag{2.8.2}
$$

由于 $T\in L(V)$，则 T 是同构映射 $\iff T$ 是双射 $\iff T$ 是单射 $\iff \mathrm{Ker}T=\{\mathbf{0}\}$。

第一步的依据是同构映射的定义，第二步的依据是 $L(V)=L(V,V)$, 可以使用定理 3.3，第三步的依据是定理 3.1。我们最后证明 $\mathrm{Ker}T=\{\mathbf{0}\}$ 的思路是，证明能使 $T(v)=0$ 的 v 只能是 $\mathbf{0}$。

那么，令

$$
T(v)=\mathbf{0}\iff a_1b_n=0,a_ib_n+b_{i-1}=0,\quad i=2,\cdots,n \tag{2.8.3}
$$

我们需要它能够推出 $b_1=b_2=\cdots=b_n=0$，首先如果 $a_1=0$，那么 b_n 就可以不取 0（如取 $b_n=1,b_{i-1}=-a_i$），因此必有 $a\neq 0$。然后就发现 $a_1\neq 0$ 时就能确定 $b_1=b_2=\cdots=b_{n-1}=0$ 了，因此 $a_1\neq 0\iff \mathrm{Ker}T=\{\mathbf{0}\}\iff T$ 是同构映射，即为所求条件。

3 习题

3.1 Gauss 消元法练习

试问 λ 取何值时, 线性方程组

$$
\begin{cases}
\lambda x_1+x_2+x_3=1\\
x_1+\lambda x_2+x_3=\lambda\\
x_1+x_2+\lambda x_3=\lambda^2
\end{cases}
\tag{3.1.1}
$$

无解？有唯一解？有无穷多解？有解时求 (通) 解。

解：Gauss 消元开干！

$$
\left(\begin{array}{ccc:c}
\lambda & 1 & 1 & 1\\
1 & \lambda & 1 & \lambda\\
1 & 1 & \lambda & \lambda^2
\end{array}\right)\to
\left(\begin{array}{ccc:c}
\lambda+2 & \lambda+2 & \lambda+2 & 1+\lambda+\lambda^2\\
1 & \lambda & 1 & \lambda\\
1 & 1 & \lambda & \lambda^2
\end{array}\right)
\tag{3.1.2}
$$

考虑 $\lambda=-2$，第一条方程构成矛盾方程，无解。考虑 $\lambda\neq-2$

$$\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&\dfrac{1+\lambda+\lambda^2}{\lambda+2}\\1&\lambda&1&\lambda\\1&1&\lambda&\lambda^2\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&\dfrac{1+\lambda+\lambda^2}{\lambda+2}\\0&\lambda-1&0&\dfrac{\lambda-1}{\lambda+2}\\0&0&\lambda-1&\dfrac{(\lambda+1)^2(\lambda-1)}{\lambda+2}\end{array}\right)\tag{3.1.3}$$

若 $\lambda=1$，有

$$\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right)\tag{3.1.4}$$

则有无穷解，通解为 $X=(1,0,0)^T+t_1(-1,1,0)^T+t_2(-1,0,1)^T$

若 $\lambda\neq1$，有

$$\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&\dfrac{1+\lambda+\lambda^2}{\lambda+2}\\0&1&0&\dfrac{1}{\lambda+2}\\0&0&1&\dfrac{(\lambda+1)^2}{\lambda+2}\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&0&-\dfrac{\lambda+1}{\lambda+2}\\0&1&0&\dfrac{1}{\lambda+2}\\0&0&1&\dfrac{(\lambda+1)^2}{\lambda+2}\end{array}\right)\tag{3.1.5}$$

则有唯一解 $X=\left(-\dfrac{\lambda+1}{\lambda+2},\dfrac{1}{\lambda+2},\dfrac{(\lambda+1)^2}{\lambda+2}\right)^T$

3.2 请练习课本 P71-72 用高斯消元法求极大线性无关组

3.3 请练习课本 P77 例 3，理解子空间的和、交、补

3.4 子空间的和、交、补

如果时间有限，请优先练习上一题，这题可以不练习。

【2020 吴志祥班期中考 T3】设 $f_1=-1+x$，$f_2=1-x^2$，$f_3=1-x^3$，$g_1=x-x^2$，$g_2=x+x^3$，$V_1=L\left(f_1,\ f_2,\ f_3\right)$，$V_2=L\left(g_1,\ g_2\right)$，求：

1. V_1+V_2 的基和维数；2. $V_1\cap V_2$ 的基和维数；3. V_2 在 $\mathbf{R}[x]_4$ 空间的补。

注：本题答案不唯一，符合要求即可。

解：

取 $\mathbf{R}[x]_4$ 的常用基 1，x，x^2，x^3 ，那么 f_1 的坐标向量是 $(-1,1,0,0)^{\mathrm{T}}$，f_2 的坐标向量是 $(1,0,-1,0)^{\mathrm{T}}$，f_3 的坐标向量是 $\alpha_3=(1,0,0,-1)^{\mathrm{T}}$，$g_1$ 的坐标向量是 $(0,1,-1,0)^{\mathrm{T}}$，g_2 的坐标向量是 $(0,1,0,1)^{\mathrm{T}}$。

对 $V_1=L\left(f_1,\ f_2,\ f_3\right)$ 施行初等变换

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\tag{3.4.1}$$

故 $\dim V_1 = 3$，对 $V_2 = L(g_1, g_2)$ 施行初等变换

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.4.2}$$

故 $\dim V_2 = 2$，对 $V_1 + V_2 = L(f_1, f_2, f_3, g_1, g_2)$ 施行初等变换

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.4.3}$$

故 $\dim(V_1 + V_2) = 4$，且它的一个基是 f_1，f_2，f_3，g_2。根据维数公式

$$\dim(V_1 \cap V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 + V_2) = 1 \tag{3.4.4}$$

且它的一个基是 g_1。

欲求 V_2 补空间的基，只需把 V_2 的基扩充为 $\mathbf{R}[x]_4$ 的基。由于 $\xi_1 = 1$

不能由 g_1，g_2 线性表示，所以 ξ_1，g_1，g_2 线性无关；对于 k_1，k_2，$k_3 \in \mathbf{R}$，再根据

$$k_1\xi_1 + k_2 g_1 + k_3 g_2 = k_1 + (k_2 + k_3)x - k_2 x^2 + k_3 x^3 \tag{3.4.5}$$

则 $\xi_2 = x$ 不能由 ξ_1，g_1，g_2 线性表示，故 $\{\xi_1,\ \xi_2,\ g_1,\ g_2\}$ 是 $\mathbf{R}[x]_4$ 的基，$\{\xi_1,\ \xi_2\}$ 是 V_2 的补空间的一组基，故 V_2 在 $\mathbf{R}[x]_4$ 空间的补是 $L(1, x)$。

3.5 证明维数公式 (P75)

若 V_1, V_2 是线性空间 V 的两个有限维子空间，求证

$$\dim V_1 + \dim V_2 = \dim(V_1 \cap V_2) + \dim(V_1 + V_2) \tag{3.5.1}$$

3.6 Schmidt 正交化与空间理解

设 $\alpha_1 = (0, 1, -1)^{\mathrm{T}}, \alpha_2 = (1, 1, 0)^{\mathrm{T}}, \alpha_3 = (1, 0, 2)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n$，取常用内积

(1) 求 α_1, α_2 之间的夹角

(2) 用 Schmidt 正交化方法将其化为标准正交基

(3) 求 $(1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$ 在该标准正交基下的坐标

解：(1)

$$\cos\langle\alpha_1,\ \alpha_2\rangle = \frac{(\alpha_1, \alpha_2)}{|\alpha_1||\alpha_2|} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \tag{3.6.1}$$

则可知夹角为 $\frac{\pi}{3}$。

(2)

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= \alpha_1 = (0,1,-1)^{\mathrm{T}} \\
\beta_2 &= \alpha_2 - \frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1 = (1,1,0)^{\mathrm{T}} - \frac{1}{2}(0,1,-1)^{\mathrm{T}} = (1,\frac{1}{2},\frac{1}{2})^{\mathrm{T}} \\
\beta_3 &= \alpha_3 - \frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1 - \frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2 = (1,0,2)^{\mathrm{T}} + (0,1,-1)^{\mathrm{T}} - \frac{4}{3}(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2})^{\mathrm{T}} = (-\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})^{\mathrm{T}}
\end{aligned} \tag{3.6.2}$$

单位化，有

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= \frac{\beta_1}{|\beta_1|} = (0,\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})^{\mathrm{T}} \\
\gamma_2 &= \frac{\beta_2}{|\beta_2|} = (\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}})^{\mathrm{T}} \\
\gamma_3 &= \frac{\beta_3}{|\beta_3|} = (-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})^{\mathrm{T}}
\end{aligned} \tag{3.6.3}$$

$(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$ 即为所求标准正交基。

(3) 设 $v=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$，则

$$(v,\gamma_1)=0,(v,\gamma_2)=\frac{4}{\sqrt{6}},(v,\gamma_3)=\frac{1}{\sqrt{3}} \tag{3.6.4}$$

可知 v 在标准正交基 $(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$ 下的坐标为 $(0,\frac{4}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{3}})$。

3.7 证明线性映射基本定理 (P105 定理 3.2)

设 $\sigma\in L(V_1,V_2)$，如果 $\dim V_1=n$，则

$$r(\sigma)+\mathrm{Ker}(\sigma)=n \tag{3.7.1}$$

3.8 线性映射基本定理进一步理解

判断以下命题的真假。如果真，请给出证明；如果假，请给出反例。

已知 $\sigma\in L(V,\ V)$，$\mathrm{dim}V=n$，则由 $r(\sigma)+\mathrm{dim}(\mathrm{ker}\sigma)=n$ 可得

$$\mathrm{Im}\sigma+\mathrm{Ker}\sigma=V \tag{3.8.1}$$

假命题，反例如下：

设 $n=2$，ϵ_1，ϵ_2 为 V 的一组基，定义 $\sigma(\epsilon_1)=\epsilon_2$，$\sigma(\epsilon_2)=0$，则 $\sigma\in L(V,\ V)$ 且 $\mathrm{Im}\sigma=\mathrm{Ker}\sigma=k\epsilon_2$，$k\in\mathbf{F}$，故 $\mathrm{Im}\sigma+\mathrm{Ker}\sigma=k\epsilon_2\neq V$。

3.9 ** 多项式空间，$L(V_1,V_2)$

本题难度较高，写不出来无需自闭（×）

【2020 吴志祥班期中考】设 $V(\mathbf{F})$ 是一个 n 维线性空间，$\sigma\in L(V,\ V)$，证明：

1. 在 $\mathbf{F}[x]$ 中有一个次数不高于 n^2 的多项式 $p(x)$ 使 $p(\sigma)=0$；
2. σ 可逆 $\iff$ 有一常数项不为 0 的多项式 $p(x)$ 使 $p(\sigma)=0$。

解：

1. 由于 $V(\mathbf{F})$ 是一个 n 维线性空间，从而 $L(V,V)$ 是一个 n^2 维线性空间，则 n^2+1 个线性变换 I, σ, σ^2, $\cdots$, σ^{n^2} 必然线性相关，故存在 a_0, a_1, $a_2, \cdots$, $a_{n^2} \in \mathbf{F}$，使得

$$a_0 I + a_1\sigma + a_2\sigma^2 + \cdots + a_{n^2}\sigma^{n^2} = 0 \tag{3.9.1}$$

令 $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n^2} x^{n^2}$，则 $p(x) \in \mathbf{F}[x]$ 且次数 $\leq n^2$，使得 $p(\sigma) = 0$。

2. $\Rightarrow$：设 $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$，其中 $a_n \neq 0$ 是次数最低的使得 $p(\sigma) = 0$ 的多项式，假设 $a_0 = 0$，那么

$$\sigma\left(a_1 I + \cdots + a_n\sigma^{n-1}\right) = 0 \tag{3.9.2}$$

从而 $a_1 I + \cdots + a_n\sigma^{n-1} \neq 0$，给定 V 的一组基以后，σ 的矩阵不可逆，故 σ 不可逆，矛盾。于是 $a_0 \neq 0$。

$\Leftarrow$：设 $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$，其中 $a_0 \neq 0$，从而

$$\sigma\left(-\frac{a_1}{a_0} I - \cdots - \frac{a_n}{a_0}\sigma^{n-1}\right) = I \tag{3.9.3}$$

这表明 σ 可逆，且 $\sigma^{-1} = -\frac{a_1}{a_0} I - \cdots - \frac{a_n}{a_0}\sigma^{n-1}$。