线性代数期中复习

1. 商空间

定义

（1）**仿射子集** 设$v \in V$，U是V的子空间，则V的**仿射子集**是V的形如$v+U$的子集，其中$v+U$定义为

$$v+U=\{v+u \mid u \in U\}.$$

（2）**商空间**　设U是V的子空间，则商空间V/U是指所有由诱导的等价类构成的集合，即V的所有平行于U的仿射子集的集合，即

$$V/U=\{v+U \mid v \in V\}.$$

商空间是线性空间

定理

（1）设U是V的子空间，$v,w \in V$，则以下陈述等价：

- $v-w \in U$;
- $v+U=w+U$;
- $(v+U)\cap(w+U)\neq\varnothing$.

（2）　设U是有限维线性空间V的子空间，则

$$\dim V/U=\dim V-\dim U.$$

书上给的证法是构造函数，也可以设小扩大。

题目

（1）设$\mathbf{F}[x]$是域$\mathbf{F}$上的全体多项式构成的线性空间，非零多项式$p(x)\in\mathbf{F}[x]$. 记$(p(x))=\{p(x)q(x) \mid q(x)\in\mathbf{F}[x]\}$，证明：

1. $(p(x))$是$\mathbf{F}[x]$的一个子空间；
2. 商空间$\mathbf{F}[x]/(p(x))$的维数等于$\deg p$，并求商空间的一组基.

（2）设$\mathbf{R}[x]$是实系数多项式构成的线性空间，令$W=\{(x^3+x^2+1)h(x) \mid h(x)\in\mathbf{R}[x]\}$. 求$\mathbf{R}[x]/W$的一组基和维数.

（3）判断： V 是线性空间，V 的 2 个仿射子集的交也是 V 的仿射子集或者空集.

2. 向量空间的积

定义

（1） 向量空间的积：$V_1\times V_2\times\cdots\times V_n=\{(v_1,\cdots,v_n):v_i\in V_i\}$
（2）加法：$(v_1,\cdots,v_n)+(w_1,\cdots,w_n)=(v_1+w_1,\cdots,v_n+w_n)$
（3）数乘：$\lambda(v_1,\cdots,v_n)=(\lambda v_1,\cdots,\lambda v_n)$

定理

（1）积的维数是维数的和：$dim(V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n) = dim(V_1) + dim(V_2) + \cdots + dim(V_n)$

（2）线性空间的和是直和当且仅当线性映射
$\phi : U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n \to U_1 + U_2 + \cdots + U_n$ $\phi(u_1, u_2, \cdots, u_n) = \sum_{i=1}^{n} u_i$ 是单射.

题目

设 T 是 n 维线性空间 V 到 m 维线性空间 W 的线性变换，证明 $U = \{(v, Tv) \mid v \in V\}$ 是 $V \times W$ 的子空间，并求 U 的维数和 $V \times W/U$ 的维数.

对偶空间

定义

（1）称 $\mathcal{L}(V, \mathbb{R})$ 上的元素为 V 上的一个**线性泛函**.

（2）称 $\mathcal{L}(V, \mathbb{R})$ 为 V 的对偶空间，记作 V^* 或者 V'.

（3）给定 $f\colon V \to W$，则定义对偶映射 $f' : W' \to V'$ 为

$$f'(\varphi) = \varphi \circ f$$

（4）　设 U 为 V 的子空间，则称$U^0 = \{\varphi \in V' : \forall u \in U, \varphi(u) = 0\}$　为 U 的**零化子**.

定理

（1）$V \cong V^*$.

使用对偶基来证明

（2）　考虑线性映射 $f\colon U \to V, g : V \to W$，则

$$(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$$

对于类似形式（在几何中称为推出和拉回）的映射，我们证明等式的思路都是直接代入定义展开证明：

$$(f \circ g)^*(\varphi) = \varphi \circ (f \circ g) = (\varphi \circ f) \circ g = (f^*(\varphi)) \circ g = g^*(f^*(\varphi)) = (g^* \circ f^*)(\varphi)$$

（3）给定线性映射 $f\colon V \to W$，则 $f^* : W^* \to V^*$ 是线性映射.
$(f + g)^* = f^* + g^*$;
$(\lambda f)^* = \lambda f^*$.

（4）零化子构成一个对偶空间的子空间.

（5）$\dim U^0 = \dim V - \dim U$

（6）设 V 和 W 都是有限维线性空间，$\sigma \in \mathcal{L}(V, W)$，则

- $ker\sigma^* = (im\sigma)^0$;
- $\dim ker\sigma^* = \dim \ker \sigma + \dim W - \dim V$;
- $\dim im\sigma^* = \dim im\sigma$;
- $im\sigma^* = (ker\sigma)^0$.

（7）σ是单射当且仅当σ^*是满射；

σ是满射当且仅当σ^*是单射.

（8）对偶映射的矩阵是原矩阵的转置

（9）行秩等于列秩等于矩阵的秩

题目

（1）设$V=\mathbf{R}^3$，$U=\{(x_1,x_2,x_3)\in V\mid x_1+x_2+x_3=0\}$，$\alpha_1=(1,1,1)$，求$f\in V'$使得

$$f(\alpha_1)=1,f(\alpha)=0,\ \forall\alpha\in U.$$

（2）设$V=\mathbf{R}[x]_4$（即次数不超过4的实系数多项式全体构成的线性空间），$T\in\mathcal{L}(V)$，T'是T的对偶映射. 已知$kerT'=span(\varphi)$，$\varphi\in V'$，$\varphi(p)=p(18)$，$\forall p\in V$. 求imT.

（3）设$\mathbf{R}[x]_3$是由次数小于3的实系数多项式构成的线性空间. 对于$g(x)\in\mathbf{R}[x]_3$，定义 $f_1(g(x))=\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$，$f_2(g(x))=\int_0^2 g(x)\,\mathrm{d}x$，$f_3(g(x))=\int_0^{-1} g(x)\,\mathrm{d}x$.

1. 证明：f_1,f_2,f_3是$\mathbf{R}[x]_3$对偶空间的一组基；
2. 求$\mathbf{R}[x]_3$的一组基$g_1(x),g_2(x),g_3(x)$，使得f_1,f_2,f_3是$g_1(x),g_2(x),g_3(x)$的对偶基.

（4）设 V 和 W 都是有限维线性空间，$T\in\mathcal{L}(V,W)$，证明 $imT'=(\ker T)^0$.

（5）设 $T\in\mathcal{L}(V,W)$，证明 T 是单射当且仅当 T^* 是满射.

（6）判断： V 是有限维线性空间，U 是 V 的真子空间，则一定存在非零的 $f\in V'$，使得 $f(U)=0$.

（7）判断：V 是有限维线性空间，U 是 V 的子空间，则 $U=0$ 当且仅当 $U^0=V'$.

（8）设 T 是 $\mathbf{R}^3$ 到 $\mathbf{R}^4$ 的线性映射，在自然基下对应的矩阵为 $\begin{pmatrix}1&-1&2\\4&-3&1\\3&4&-2\\6&2&-1\end{pmatrix}$，
$f(x,y,z,w)=x-y+z+2w$ 是 $\mathbf{R}^4$ 上的线性泛函，求对偶映射 T' 在相应对偶基下的矩阵以及 $T'(f)$.

多项式

定义

（1）数域上的多项式函数：　设$\mathbf{F}$是数域，对于函数 $p\colon\mathbf{F}\to\mathbf{F}$，若存在$a_0,\ldots,a_m\in\mathbf{F}$使得对任意$x\in\mathbf{F}$有

$$p(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_mx^m,$$

则称函数p为系数在$\mathbf{F}$中的**多项式**，其中a_ix^i称为第i次项，使得$a_k\neq 0$成立的最大整数称为多项式的**次数**，记为$\deg p=k$.

（2）多项式的带余除法：
设$p(x),s(x)\in\mathbf{F}[x]$且$s(x)\neq 0$，则存在唯一的多项式$q(x),r(x)\in\mathbf{F}[x]$，使得$p(x)=s(x)q(x)+r(x)$，且$\deg r<\deg s$.

（3）多项式的表示：
$\mathbf{R}[x]_n$ 次数不超过 n 的实系数多项式全体构成的线性空间

定理

（1）设$\mathbf{F}$是数域，$a_0,\ldots,a_m\in\mathbf{F}$，若对任意$x\in\mathbf{F}$有$p(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_mx^m=0$，则$a_0=\cdots=a_m=0$.

（2）多项式的唯一分解定理

设$p(x) \in \mathbf{F}[x]$是非常数多项式， $p(x)$可以分解为不可约多项式的乘积；若有$p(x)=q_1(x)q_2(x)\cdots q_m(x)=s_1(x)s_2(x)\cdots s_n(x)$,为$p(x)$的两个不可约分解，即所有的$q_i(x),s_j(x)$都是不可约多项式，则$m=n$，且经过适当调换顺序后有$q_i(x)\sim s_i(x)$， $i=1,2,\ldots,n.$

实数域上分解为一次二次，复数域分解为一次

题目

（1）设$g(x)=ax+b$，$a,b\in\mathbf{F}$，$a\neq 0$，$f(x)\in\mathbf{F}[x]$，证明：$g(x)$是$f^2(x)$的因式的充要条件是$g(x)$是$f(x)$的因式.

（2）设$\mathbf{R}[x]$是实系数多项式构成的线性空间，令$W=\{(x^3+x^2+1)h(x)\mid h(x)\in\mathbf{R}[x]\}$.
证明：W是$\mathbf{R}[x]$的子空间；

不变子空间与本征值

定义

（1）不变子空间：设$\sigma\in\mathcal{L}(V)$，若V的子空间U满足$\forall\alpha\in U$，$\sigma(\alpha)\in U$，则称U是σ的**不变子空间**，或称U在σ下不变，简称为σ-子空间.
U在T下不变当且仅当$T|_u$ 是U上的算子.

（2）限制映射：设V是数域$\mathbf{F}$上的线性空间，$\sigma\in\mathcal{L}(V)$，我们在V的子空间U上定义映射$\sigma|_U$如下：

$$\sigma|_U:U\to V,\ \ \sigma|_U(\alpha)=\sigma(\alpha),\ \ \forall\alpha\in U,$$

则称$\sigma|_U$是σ在U上的**限制映射**.

（3）本征值：设σ是线性空间$V(\mathbf{F})$上的一个线性变换，如果存在数$\lambda\in\mathbf{F}$和非零向量$\xi\in V$使得$\sigma(\xi)=\lambda\xi$，则称数λ为σ的一个**特征值/本征值**，并称非零向量ξ为σ属于其特征值λ的**特征向量/本征向量**

（4）商算子 T/U 是 V/U 上的算子，满足

$$(T/U)(v+U)=Tv+U$$
$$\forall v\in V$$

（5）上述求解特征向量的方法需要我们求解$f(\lambda)=|\lambda E-A|$的根，事实上$f(\lambda)=|\lambda E-A|$是在之后的讨论中有核心地位的概念，我们称其为矩阵A的**特征多项式**，其k重根称为k重特征值（称k为代数重数），该特征值对应的特征子空间维数称为该特征值的几何重数.

（6）设$\sigma\in\mathcal{L}(V)$，V是n维复线性空间，则σ必有特征值.

（7）任取$\sigma\in\mathcal{L}(V)$，V是n维线性空间（无论数域是实或复），则σ一定有一维或二维不变子空间.

（8）算子称为可对角化的，如果该算子关于 V 的某个基有对角矩阵.

定理

（1）设σ是$V(\mathbf{F})$上的线性变换，I为恒等映射，则下述条件等价：

- $\lambda\in\mathbf{F}$是σ的特征值；
- $\sigma-\lambda I$不是单射；
- $\sigma-\lambda I$不是满射；
- $\sigma-\lambda I$不可逆.

（2）特征值线性无关

（3）至多有 $\dim V$ 个特征值

（4）上三角矩阵的条件
设 $T \in \mathcal{L}(\mathcal{V})$, 且 $V_1, \cdots, V_n$ 是 V 的基． 则以下条件等价：
(a) T 关于 $V_1, \cdots, V_n$ 的矩阵是上三角的；
(b) 对每个 $j = 1, \cdots, n$ 有 $T(v_j) \in span(v_1, \cdots, v_n)$
(c) 对每个 $j = 1, \cdots, n$ 有 $span(v_1, \ldots, v_j)$ 在T 下不变．

(b) 的推论 有任意维数的不变子空间

（5）设 V是有限维复向量空间， $T \in \mathcal{L}(\mathcal{V})$. 则 T关于V 的某个基有上三角矩阵．

（6） 本征空间之和是直和

（7）V是有限维的， $T \in \mathcal{L}(\mathcal{V})$. 用 $$ 表示T 的所有互异的本征值． 则下
列条件等价：

- T 可对角化；
- V 有由 T 的本征向量构成的基；
- V 有在 T 下不变的一维子空间 $U_1, \ldots, U_n$使得 $V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_n$；
- $V = E(\lambda_1, T) \oplus \cdots \oplus E(\lambda_m, T)$；
- $\dim V = \dim E(\lambda_1, T) + \cdots + \dim E(\lambda_m, T)$

（8）若 $T \in \mathcal{L}(\mathcal{V})$ 有 $\dim V$ 个互异的本征值，则 T 可对角化

题目

不变子空间

$T \in \mathcal{L}(V)$ 在一组基 $\vec{\varepsilon} = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ 下的矩阵为

$$T(\vec{\varepsilon}) = (\vec{\varepsilon}) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

求 V 所有的 T-不变子空间.

判断：
（1） $T \in \mathcal{L}(V)$. 若子空间 $W \in V$ 在 T 下不变，则其补空间 W' 在 T 下也不变;

特征值与特征向量

设 T 是 $\mathbf{F}^3$ 上的算子，它关于标准基的矩阵为 $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -3 \\ -2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$，求 $\mathbf{F}^3$ 的一个由 T 的本征向量组成的规范正交基.

设$A \in \mathbf{R}^{n \times n}$满足$A^2 = A$，证明：存在可逆矩阵$P$使得

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{n \times n},$$

其中r为A的秩.

幂等矩阵特征值仅有0和1

设V为n维复向量空间，$S,T\in\mathcal{L}(V)$，$ST=TS$，则
（1） S,T至少有一个公共的特征向量；

（2） 存在V的一组基，使得S和T在此基下的矩阵均为上三角矩阵.

内积空间

定义；

（1）内积：符合以下条件的有序对(u,v)到 $\langle u,v\rangle$的映射：

- 正定性：$\forall v\in V$，$\langle v,v\rangle\geqslant 0$，$\langle v,v\rangle=0\iff v=\vec{0}$；
- 第一个位置的加性：$\forall u,v,w\in V$，$\langle u+v,w\rangle=\langle u,w\rangle+\langle v,w\rangle$；
- 第一个位置的齐性：$\forall\lambda\in\mathbf{F}$，$\forall u,v\in V$，$\langle\lambda u,v\rangle=\lambda\langle u,v\rangle$
- 共轭对称性：$\forall u,v\in V$，$\langle u,v\rangle=\overline{\langle v,u\rangle}$.

（2）内积空间：内积空间就是带有内积的向量空间

（3）范数：对于 $v\in V$，v 的**范数**（记作 $\|v\|$）定义为 $\|v\|=\sqrt{\langle v,v\rangle}$.

（4）正交：两个向量 $u,v\in V$ 称为**正交的**，如果 $\langle u,v\rangle=0$.

（5）正交分解：设 $u,v\in V$ 且 $v\neq\vec{0}$. 令 $c=\dfrac{\langle u,v\rangle}{\|v\|^2}$，$w=u-\dfrac{\langle u,v\rangle}{\|v\|^2}v$. 则 $\langle w,v\rangle=0$且 $u=cv+w$.

（6）规范正交基：如果一个向量组的每个向量范数都是 1 且与其他向量正交则称这个向量组是**规范正交**的.
任何一个向量可以写成规范正交基的线性组合：

$$v=\sum_{i=1}^{n}\langle v,e_i\rangle e_i$$

（7）施密特正交化：
 设 $v_1,\ldots,v_n$ 是 V 中的线性无关向量组. 设 $e_1=\dfrac{v_1}{\|v_1\|}$. 对于 $j=2,\ldots,m$，定义 e_j 如下：

$$e_j=\frac{v_j-\langle v_j,e_1\rangle e_1-\cdots-\langle v_j,e_{j-1}\rangle e_{j-1}}{\|v_j-\langle v_j,e_1\rangle e_1-\cdots-\langle v_j,e_{j-1}\rangle e_{j-1}\|}$$

则 $e_1,\ldots,e_m$ 是 V 中的标准正交组，使得对 $j=1,\ldots,m$ 有

$$span(v_1,\ldots,v_j)=span(e_1,\ldots,e_j)$$

（8）舒尔定理：设 V 是有限维的复内积空间，且 $T\in\mathcal{L}(V)$，则 T 关于 V 的某个标准正交基具有上三角矩阵.

（9）里斯表示定理：设 V 是有限维的且 φ 是 V 上的线性泛函，则存在唯一的向量$u\in V$ 使得对 $\forall v\in V$ 均有 $\varphi(v)=\langle v,u\rangle$.

（10）正交补： 设 U 是 V 的子集，则 U 的\term{正交补}（记作 $U^\perp$）是由 V 中与 U 的每个向量都正交的那些向量组成的集合：

$$U^\perp=\{v\in V\mid\forall u\in U,\ \langle v,u\rangle=0\}$$

（11）正交投影：设 U 是 V 的有限维子空间. 定义 V 到 U 上的\term{正交投影}为如下算子 $P_U \in \mathcal{L}(V)$：对 $v \in V$ 将其写成 $v = u + w$，其中$u \in U$ 且 $w \in U^\perp$，则 $P_U v = u$.

定理

（1） 对于每个取定的 $u \in V$，将 v 变为 $\langle v, u\rangle$ 的函数是 V 到 $\mathbf{F}$ 的线性映射.

（2）$\forall u \in V$，$\langle \vec{0}, u\rangle = \langle u, \vec{0}\rangle = 0$.

（3） $\forall u, v, w \in V$，$\langle u, v + w\rangle = \langle u, v\rangle + \langle u, w\rangle$.

（4） $\forall \lambda \in \mathbf{F}$，$\forall u, v \in V$，$\langle u, \lambda v\rangle = \overline{\lambda}\langle u, v\rangle$.

（5）$\forall v \in V$，$\|v\| = 0 \iff v = \vec{0}$.

（6） $\forall v \in V$，$\forall \lambda \in \mathbf{F}$，$\|\lambda v\| = |\lambda|\, \|v\|$.

（7）0 正交于任何向量，0 是 V 中唯一一个与自身正交的向量

（8）柯西-施瓦兹不等式：设 $u, v \in V$. 则 $|\langle u, v\rangle| \leqslant \|u\|\|v\|$. 等号成立当且仅当 u, v 之一是另一个的标量倍.

（9）三角不等式：设 $u, v, w \in V$. 则 $\|u + v\| \leqslant \|u\| + \|v\|$.

（10）平行四边形恒等式：设 $u, v \in V$. 则 $\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$.

（11）正交补的性质：

- 若 U 是 V 的子集（注意使用的是子集），则 $U^\perp$ 是 V 的子空间.
- $\{\vec{0}\}^\perp = V$.
- $V^\perp = \{\vec{0}\}$.
- 若 U 是 V 的子集，则 $U \cap U^\perp \subset \{\vec{0}\}$.
- 若 U 和 W 均为 V 的子集且 $U \subset W$，则 $W^\perp \subset U^\perp$.

（12）设 U 是 V 的有限维子空间，则 $V = U \oplus U^\perp$.

- 若 V 是有限维的且 U 是 V 的子空间，则$\dim U^\perp = \dim V - \dim U$
- 设 U 是 V 的有限维子空间，则 $U = (U^\perp)^\perp$

（13）正交投影的性质：

- $P_U \in \mathcal{L}(V)$;
- 对 $\forall u \in U$ 均有 $P_U u = u$;
- 对 $\forall w \in U^\perp$ 均有 $P_U w = \vec{0}$;
- $im P_U = U$;
- $\ker P_U = U^\perp$;
- $v - P_U v \in U^\perp$;
- \label{item:23:正交投影性质:7}
  $P_U{}^2 = P_U$;
- $\|P_U v\| \leqslant \|v\|$;
- 对 U 的每个规范正交基 $e_1, \ldots, e_m$ 均有 $P_U v = \langle v, e_1\rangle e_1 + \cdots + \langle v, e_m\rangle e_m$.

（14）设 U 是 V 的有限维子空间，$v \in V$ 且 $u \in U$. 则

$$\|v - P_U v\| \leqslant \|v - u\|.$$

等号成立当且仅当 $u = P_U v$.

题目

（1）设$M_n(\mathbf{C})$是n阶复矩阵全体构成的线性空间，
$U=\{A\in M_n(\mathbf{C})\mid A^{\mathrm{T}}=A\}, W=\{B\in M_n(\mathbf{C})\mid B^{\mathrm{T}}=-B\}$. 在$M_n(\mathbf{C})$上定义二元映射$\langle\cdot,\cdot\rangle\colon M_n(\mathbf{C})\times M_n(\mathbf{C})\to\mathbf{C}$，使得对于任意的$A,B\in M_n(\mathbf{C})$，有$\langle A,B\rangle=tr(AB^{\mathrm{H}})$，其中$B^{\mathrm{H}}$表示$B$的共轭转置矩阵.

- 证明：$(M_n(\mathbf{C}),\langle\cdot,\cdot\rangle)$是复内积空间；
- 证明：$U=W^{\perp}$；
- 设$A\in M_n(\mathbf{C})$，试求$B\in U$使得$\forall D\in U$，有$\|A-B\|\leqslant\|A-D\|$，其中$\|A\|=\sqrt{\langle A,A\rangle}$.

（2）判断：$\mathbf{R}^2$ 上存在一个内积，使得该内积确定的范数 $\|(x,y)\|=\max\{|x|,|y|\}$.

（3）定义在 $V=\mathbf{R}^3$ 上的运算
[\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle_V = x_1 y_1 + x_2 y_2 + (x_2 + x_3)(y_2 + y_3)]
其中 $\vec{x}=(x_1,x_2,x_3)$，$\vec{y}=(y_1,y_2,y_3)$.

1. 验证 $\langle\cdot,\cdot\rangle_V$ 是 $\mathbf{R}^3$ 上的一个内积;
2. 求 $\mathbf{R}^3$ 在 $\langle\cdot,\cdot\rangle_V$ 下的一组标准正交基;
3. 求 $\vec{\beta}\in V$ 使得 $\forall\vec{x}\in V$，$x_1+2x_2=\langle\vec{x},\vec{\beta}\rangle_V$.

（4）设 $U=span\{(1,1,0,0)^{\mathrm{T}},(1,1,-1,2)^{\mathrm{T}}\}$ 是 $\mathbf{R}^4$ 的子空间，求 $u\in U^{\perp}$ 使得 $\|u-(1,1,2,2)^{\mathrm{T}}\|$ 最小.

（5）定义在 $V=\mathbf{R}^3$ 上的运算

$$\langle\vec{x},\vec{y}\rangle_V=a(x_2-x_1)(y_2-y_1)+bx_2y_2+x_3y_3,\quad a,b>0.$$

其中 $\vec{x}=(x_1,x_2,x_3)$，$\vec{y}=(y_1,y_2,y_3)$.

1. 验证 $\langle\cdot,\cdot\rangle_V$ 是 $\mathbf{R}^3$ 上的一个内积;
2. 求 $\mathbf{R}^3$ 在 $\langle\cdot,\cdot\rangle_V$ 下的一组标准正交基;
3. 求 $\vec{\beta}\in V$ 使得 $\forall\vec{x}\in V$，$x_1+x_2+x_3=\langle\vec{x},\vec{\beta}\rangle_V$.

（6）设 V 是由 $1,\cos x,\sin x$ 所张成的线性空间，求 V 中的向量 $f(x)$，使得等式

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}(2x-1)g(x)\,\mathrm{d}x$$

对所有 V 中所有 $g(x)$ 都成立.

立体几何

基本方程

（1）平面方程：

- 根据法向量

$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

- 一般式：

$ax+by+cz+d=0$

- 根据与坐标轴交点

$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

（2）直线方程

- 参数方程
  $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$
- 平面交线

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0 \end{cases}$$

几何关系

平面关系

将两个平面方程：
$a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1$
$a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2$

联立得到增广矩阵(A,b)：

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \end{array}\right]$$

以及系数矩阵 A：

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

系数矩阵的秩	关系	增广矩阵的秩	解	关系
2	=	2	无穷多解	交于一条直线
1	<	2	无解	平行
1	=	1	无穷多解	重合

线面关系

将平面方程和直线方程联立：

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases}$$

得到增广矩阵(A,b)：

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right]$$

系数矩阵的秩	关系	增广矩阵的秩	解	关系
3	=	3	唯一解	交于一点
2	<	3	无解	平行
2	=	2	无穷多解	线在面内

三个面的关系

系数矩阵的秩	关系	增广矩阵的秩	解	关系
3	=	3	唯一解	交于一点
2	<	3	无解	两平面交线平行于剩下一个平面或者两个平面重合并平行于第三个
2	=	2	无穷多解	交于一线
1	<	2	无解	平行
1	=	1	无穷多解	重合

直线关系

联立两个直线方程：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 = b_4 \end{cases}$$

得到增广矩阵(A,b)：

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & b_4 \end{array}\right]$$

系数矩阵的秩	关系	增广矩阵的秩	解	关系
3	<	4	无解	不共面
3	=	3	唯一解	交于一点
2	<	3	无解	方向向量共面，平行不相交
2	=	2	无穷多解	重合

度量

点面的距离

点 $P(x_1,y_1,z_1)$ 到平面 $\pi: ax+by+cz+d=0$ 的距离为:

$$d=\frac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

点线的距离

点 $P(x_1,y_1,z_1)$ 到直线 $\ell: \frac{x-x_0}{l}+\frac{y-y_0}{m}+\frac{z-z_0}{n}=0$ 的距离.

先计算出点 P 到直线过的点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 的距离

三角形中用勾股定理计算

面面距离

$$d=\frac{|\overrightarrow{P_1P_2}\cdot n|}{|n|}$$

面面夹角

$$\theta=\arccos\frac{|n_1\cdot n_2|}{|n_1||n_2|}$$

线线距离

令两条线方向向量分别为 $\overrightarrow{S_1}$ 和 $\overrightarrow{S_2}$，两条线上分别有一点点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 和 $P_2(x_2,y_2,z_2)$

若两条线平行，则两条线距离为:

$$d=\frac{|\overrightarrow{S_1}\times\overrightarrow{P_1P_2}|}{|\overrightarrow{S_1}|}$$

，则与两条线都垂直的向量为 $\overrightarrow{S_1}\times\overrightarrow{S_2}$，两条线的距离为

$$d=\frac{|(\overrightarrow{S_1}\times\overrightarrow{S_2})\cdot\overrightarrow{P_1P_2}|}{|\overrightarrow{S_1}\times\overrightarrow{S_2}|}$$

线线夹角

$$\theta=\arccos\frac{|\overrightarrow{S_1}\cdot\overrightarrow{S_2}|}{|S_1||S_2|}$$

或者

$$\pi-\theta$$

线面距离

直线:

$$\ell:\frac{x-x_0}{l}+\frac{y-y_0}{m}+\frac{z-z_0}{n}=0$$

平面:

$$\pi : a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$$

距离为：

$$d = |\overrightarrow{P_1P_2} \cdot n| = \frac{a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0) + c(z_1 - z_0)}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

线面夹角

$$\theta = \arcsin \frac{|n \cdot s|}{|n||s|}$$

仅列举

纯计算题：

设$V = \mathbf{R}^{2\times 2}$，$W = \mathbf{R}^{3\times 2}$，$T \in \mathcal{L}(V, W)$由下面的矩阵乘法定义：

$$T(A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} A,\ \ \forall A \in V.$$

(1) 求T的像空间与核空间；

(2) 求V和W的一组基，使得T在这两组基下的矩阵为$\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{6\times 4}$，其中$E_r$为$r$阶单位矩阵，$r = \dim imT$.

里斯表定理的逆天计算

求多项式 $q \in \mathbf{R}[x]_3$，使得 $\forall p \in \mathbf{R}[x]_3$，$\int_0^1 p(x)(\sin \pi x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 p(x)q(x)\,\mathrm{d}x$.

极分解

设 $T \in \mathcal{L}(V)$，证明 T 是可逆的当且仅当存在唯一的等距同构 $S \in \mathcal{L}(V)$ 使得 $T = S\sqrt{T^*T}$.

正定算子

设 V 是实内积空间，T 是 V 上的可逆线性变换，满足 $\forall x, y \in V, \langle T(T(x)), y\rangle = \langle x, T(y)\rangle$，证明 T 是等距同构.

设 $T \in \mathcal{L}(V)$，对 $u, v \in V$，定义 $\langle u, v\rangle_T = \langle T(u), v\rangle$，证明 $\langle \cdot, \cdot\rangle_T$ 是 V 上的内积当且仅当 T 是关于原内积 $\langle \cdot, \cdot\rangle$ 的可逆正算子.

设 T 是内积空间 V 上的正规算子，证明 $\forall k \in \mathbf{Z}^+$，$\ker T^k = \ker T$.

广义特征值

设λ是n阶实矩阵A的特征值，$\lambda^3=1$且$\lambda\notin\mathbf{R}$，A的极小多项式次数为2，证明：矩阵$A+I$可逆.

若当标准型

设$A=\begin{pmatrix}2&1&1\\-2&-1&-2\\1&1&2\end{pmatrix}$，求$A$的若当标准形$J$和矩阵$P$，使得$P^{-1}AP=J$.

设算子T的特征值仅为1，代数重数为5，几何重数为3，求T的所有可能的若当标准形及相应的极小多项式.

设V为n维复向量空间，$T\in\mathcal{L}(V)$，T在V的一组基$e_1,e_2,\ldots,e_n$ 下的矩阵为对角矩阵$diag\{d_1,\ldots,d_n\}$，且$d_i\neq d_j\ \ (i\neq j)$.

（1）求T的所有一维不变子空间；

（2）求T的所有不变子空间.

求下列变换的所有不变子空间：

（1） $\sigma_A\in\mathcal{L}(\mathbf{R}^2)$，$A=\begin{pmatrix}0&1\\a&0\end{pmatrix}$；

（2） $T\in\mathcal{L}(V)$，$\dim V=n$，$T^n=O$，$T^{n-1}\neq O$；

（3） $\sigma\in\mathcal{L}(\mathbf{C}^5)$，$A=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0\\0&1&0&0&1\\0&0&1&0&-3\\0&0&0&1&3\end{pmatrix}$，$\det(\lambda E-A)=\lambda^2(\lambda-1)^3$.

设V和W是数域$\mathbf{F}$上的线性空间，$V_1,V_2,\ldots,V_n$是V的n个子空间且$V=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_n$. 证明：$\mathcal{L}(V,W)$和$\mathcal{L}(V_1,W)\times\mathcal{L}(V_2,W)\times\cdots\times\mathcal{L}(V_n,W)$同构.

考虑无限维，构造映射

对$x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{C}^n$，定义 1 范数为$\|x\|_1=\sum\limits_{i=1}^n|x_i|$，设$A=(a_{ij})_{n\times n}\in\mathbf{C}^{n\times n}$.

（1） 求A关于 1 范数的矩阵范数，即$\|A\|_1=\max\{\|AX\|_1\mid\|X\|_1=1\}$；

（2） 已知$B=(b_{ij})_{n\times n}\in\mathbf{C}^{n\times n}$，$|a_{ij}|\leqslant b_{ij}$，$1\leqslant i,j\leqslant n$. 证明：对任何正整数$m$，有$\|A^m\|_1\leqslant\|B^m\|_1$；

（3）设$|a_{ii}|<1\ \ (1\leqslant i\leqslant n)$，$a_{ij}=0\ \ (i>j)$. 证明：$\|A^m\|_1\to0\ \ (m\to\infty)$.（提示：若$a_{ij}=0\ \ (i>j)$，则$A^n=O$）

立体几何

已知平面方程

$$
\pi_1\colon x-2y+2z+d=0,\enspace \pi_2\colon -2x+4y+cz+1=0.
$$

$$\pi_1\colon x-2y+2z+d=0,\enspace \pi_2\colon -2x+4y+cz+1=0.$$

$$\pi_1\colon x-2y+2z+d=0,\enspace \pi_2\colon -2x+4y+cz+1=0.$$

分别求c,d使分别满足

（1） π_1与π_2平行；

（2） π_1与π_2重合；

（3） π_1与π_2垂直；

（4） π_1与π_2相交，并求交线的参数方程；

（5） 原点到交线的最短距离为1.

求通过直线$L\colon \begin{cases} 2x+y-3z+2=0 \\ 5x+5y-4z+3=0 \end{cases}$的两个互相垂直的平面$\pi_1$和$\pi_2$，使$\pi_1$过点$(4,-3,1)$.

求直线$l_1\colon \begin{cases} x-y=0 \\ z=0 \end{cases}$与直线$l_2\colon \dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-3}{-1}$的距离.

考虑二直线
$l_1\colon \begin{cases} x=t \\ y=-t-1 \\ z=3t \end{cases}$，$l_2\colon \begin{cases} ax+2y+z=0 \\ x-y-z+d=0, \end{cases}$
求a，d满足的条件，使得二直线

（1）平行；

（2）重合；

（3）相交；

（4）异面.

已知直线 $L_1=\begin{cases} x+y+z-1=0 \\ x-2y+2=0 \end{cases}$，$L_2=\begin{cases} x=2t \\ y=t+a \\ z=bt+1 \end{cases}$，试确定 a,b 满足的条件使得 L_1,L_2 是:

（1） 平行直线;
（1） 异面直线.

求过直线 $\begin{cases} x-y+z+4=0 \\ x+y-3z=0 \end{cases}$ 和点 $(1,-1,-1)$ 的平面方程，并求该点到直线的距离.

不变子空间

（1）设V是一个有限维线性空间，$T\in\mathcal{L}(V)$是同构映射，记其逆映射为T^{-1}. 设W是T的不变子空间，证明：W是T^{-1}的不变子空间.