3. 求齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+4x_4-3x_5=0 \\ 2x_1+x_2+3x_3+5x_4-5x_5=0 \\ x_1-x_2+3x_3-2x_4-x_5=0 \\ 3x_1+x_2+5x_3+6x_4-7x_5=0 \end{cases}$ 的通解.

4. 求非齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1-x_2+2x_3-2x_4+3x_5=1 \\ 2x_1-x_2+5x_3-9x_4+8x_5=-1 \\ 3x_1-2x_2+7x_3-11x_4+11x_5=0 \\ x_1-x_2+x_3-x_4+3x_5=3 \end{cases}$ 的通解.

2. 判断 $W_1=\left\{(x,y,z)\,\middle|\,\frac{x}{3}=\frac{y}{2}=z\right\}$，$W_2=\{(x,y,z)\mid x+y+z=1,\ x-y+z=1\}$ 是否为 $\mathbf{R}^3$ 的子空间；

3. (线性方程组的解) 试说明齐次线性方程组 $AX=0$ 的解集是线性空间 $\mathbf{F}^n$ 的一个子空间，但非齐次线性方程组的解不再构成线性空间 (因为加法运算不封闭，具体见教材 P62 的 2.2 节开头的例子以及 P86 习题 3(3).

1. 检验下列集合对指定的加法和数乘运算是否构成实数域上的线性空间.

   (1) 有理数集 $\mathbf{Q}$ 对普通的数的加法和乘法；

   (2) 集合 $\mathbf{R}^2$ 对通常的向量加法和如下定义的数量乘法：$\lambda\cdot(x,y)=(\lambda x,y)$；

   (3) $\mathbf{R}_+^n$ (即 n 元正实数向量) 对如下定义的加法和数乘运算：

$$(a_1,\dots,a_n)+(b_1,\dots,b_n)=(a_1b_1,\dots,a_nb_n)$$
$$\lambda\cdot(a_1,\dots,a_n)=(a_1^\lambda,\dots,a_n^\lambda)$$

2. 设 V 是一个线性空间, W 是 V 的子集, 证明: W 是 V 的子空间 $\iff \operatorname{span}(W)=W$.

例 2.4

证明：$\mathbf{R}[x]_3$ 是有限维线性空间，$\mathbf{R}[x]$ 是无限维线性空间.

例 3.1

(1) 判断 $\mathbf{R}^3$ 中向量 $(1,1,0),(0,1,1),(1,0,-1)$ 的线性相关性；

(2) 判断 $\mathbf{R}^3$ 中向量 $(1,-3,1),(-1,2,-2),(1,1,3)$ 的线性相关性；

(3) 判断 $\mathbf{R}[x]_3$ 中 $p_1(x)=1+x$，$p_2(x)=1-x$，$p_3(x)=x+x^2$ 的线性相关性；

(4) 判断连续函数全体构成的线性空间中 1，$\sin^2 x$，$\cos^2 x$ 的线性相关性；

(5) 判断连续函数全体构成的线性空间中 1，2^x，2^{-x} 的线性相关性.

例 3.2

证明以下定理 3.3 的推论：

(1) 若向量组 B_1 可以被向量组 B_2 线性表示，则有 $r(B_1)\leqslant r(B_2)$；

(2) 设 B_1 和 B_2 是两个线性无关向量组，若 B_1 可以被 B_2 线性表示，B_2 也可以被 B_1 线性表示，则 B_1 和 B_2 长度相等.

例 3.4

证明：线性空间 $\mathbf{C}(\mathbf{C})$ 维数为 1，不同于线性空间 $\mathbf{C}(\mathbf{R})$ 维数为 2.

例 3.5

证明：$1,(x-5)^2,(x-5)^3$ 是 $\mathbf{R}[x]_4$ 的子空间 U 的一组基，其中 U 定义为

$$U=\{p\in\mathbf{R}[x]_4 \mid p'(5)=0\}.$$

例 3.6

求向量组

$\{\alpha_1=(1,-1,2,4),\alpha_2=(0,3,1,2),\alpha_3=(3,0,7,14),\alpha_4=(1,-1,2,0),\alpha_5=(2,1,5,6)\}$

的极大线性无关组和秩.

例 3.7

设 $V=\mathbf{R}[x]_4$，我们已有向量组 $B=\{1+x,x^3+x^2+3x\}$，请将其扩充为 V 的一组基.

例 3.9

求 $\mathbf{R}[x]_4$ 中向量组 $\{p_1=x^3-x^2+2x+4,p_2=3x^2+x+2,p_3=3x^3+7x+14,p_4=x^3-x^2+2x,p_5=2x^3+x^2+5x+6\}$ 的极大线性无关组.

9. 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_s$ 的秩为 r. 在其中任取 m 个向量 $\alpha_{i1},\alpha_{i2},\dots,\alpha_{im}$，证明：向量组 $\alpha_{i1},\alpha_{i2},\dots,\alpha_{im}$ 的秩 $\geqslant r+m-s$.

10. 已知 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ 线性无关，而 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n,\beta,\gamma$ 线性相关. 证明：要么 β,γ 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ 线性表示，要么 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n,\beta$ 与 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n,\gamma$ 等价.

1. 已知 m 个向量 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m$ 线性相关，但其中任意 $m-1$ 个都线性无关，证明:

   (1) 若 $k_1\alpha_1+\cdots+k_m\alpha_m=0$，则 $k_1,\dots,k_m$ 全为 0 或全不为 0;

   (2) 若以下等式成立

$$\begin{aligned}k_1\alpha_1+\cdots+k_m\alpha_m&=0\\ l_1\alpha_1+\cdots+l_m\alpha_m&=0\end{aligned}$$

   其中 $l_1\neq 0$，证明：$\dfrac{k_1}{l_1}=\cdots=\dfrac{k_m}{l_m}$.

2. (替换定理) 设 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_r$ 线性无关，且可以被 $\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n$ 线性表示，则可以将 $\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n$ 中的 r 个向量替换成 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_r$ 后得到与 $\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n$ 等价的新向量组（注：可以使用数学归纳法证明）.

3. 设线性空间 $V=\mathbf{F}^n$. 证明:

   (1) 存在 V 的子空间 W，使得 W 的任一非零向量的分量均不为 0;

   (2) 若 V 的子空间 W 的任一非零向量的分量均不为 0，则 $\dim W=1$;

   (3) 若 V 的子空间 W 的任一非零向量的零分量个数均不超过 r，则 $\dim W\leqslant r+1$.

例 4.2

$V_1,V_2,\dots,V_s$ 是线性空间 V 的 s 个非平凡子空间，证明：存在 V 的一组基 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ 都不在 $V_1,V_2,\dots,V_s$ 中.

2. 设 $f_1=-1+x$，$f_2=1-x^2$，$f_3=1-x^3$，$g_1=x-x^2$，$g_2=x+x^3$，$V_1=\mathrm{span}(f_1,f_2,f_3)$，$V_2=\mathrm{span}(g_1,g_2)$，求：

(1) V_1+V_2 的基和维数；

(2) $V_1\cap V_2$ 的基和维数；

(3) V_2 在 $\mathbf{R}[x]_4$ 空间的补.

3. 设

$$W_1=\left\{\begin{pmatrix} x & -x \\ y & z\end{pmatrix}\middle| x,y,z\in\mathbf{F}\right\},W_2=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -a & c\end{pmatrix}\middle| a,b,c\in\mathbf{F}\right\}.$$

(1) 证明:W_1,W_2 是 $\mathbf{M}_2(\mathbf{F})$ 的子空间,并求 $\dim W_1,\dim W_2,\dim(W_1+W_2),\dim(W_1\cap W_2)$;

(2) 求 $W_1\cap W_2$ 的一组基，并求 $A=\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 1\end{pmatrix}$ 关于这组基的坐标.

8. 判断下列说法是否正确：

(1) 若 $V\subseteq V_1\cup V_2\cup\cdots\cup V_s$，则 $V=(V_1\cap V)\cup(V_2\cap V)\cup\cdots\cup(V_s\cap V)$;

(2) 若 $V\subseteq V_1+V_2+\cdots+V_s$，则 $V=(V_1\cap V)+(V_2\cap V)+\cdots+(V_s\cap V)$.

9. 设 V 为有限维线性空间，V_1 为其非零子空间. 证明：存在唯一的子空间 V_2，使得 $V=V_1\oplus V_2$ 的充要条件为 $V_1=V$.

2. 设 $W_0,W_1,W_2,\ldots,W_s$ 是线性空间 V 的 $s+1$ 个非平凡子空间，且 $W_0\subseteq W_1\cup W_2\cup\cdots\cup W_s$. 证明：必存在 i 使得 $W_0\subseteq W_i$.