线性映射及其矩阵表示

知识复习

请自我检查是否对以下内容有印象

1. 线性空间的八条性质
2. **基的定义和性质**
3. 线性相关的定义与判别
4. 维数公式
5. 基的构造和扩展

重点

1. 定理，定义与常见结论的**理解**和**记忆**
2. 熟练结合线性空间的定理定义解决问题
3. 使用精准的**数学语言**描述感性的认识

授课内容

1. 线性映射的定义、基本的例子和基本运算
2. 线性映射的像与核的定义与性质，线性映射被基下的像唯一确定
3. 线性映射基本定理的陈述与证明思想，以及在像与核的性质证明下的应用
4. 可逆与同构，同构的等价条件、经典的例子以及重要意义
5. 线性映射矩阵表示的引入、定义以及例子、易错点等

线性映射

引入：我们需要一个变换来研究不同线性空间之间的关联，这个运算需要具有"线性"性质，即包含加性和齐次性两条要求。

定义

> 线性映射：从线性空间 $V_1(\mathbf{F})$ 到 $V_2(\mathbf{F})$ 的一个映射σ是线性的，如果 $\forall\alpha,\beta\in V_1$ 和 $\forall\lambda,\mu\in\mathbf{F}$ 都有

$$\sigma(\lambda\alpha+\mu\beta)=\lambda\sigma(\alpha)+\mu\sigma(\beta).$$

从线性空间 V 到自身的线性映射 σ 也叫作 V 上的线性变换，在有的教材中也称为算子。

为方便称呼，我们称对于$V_1(\mathbf{F})$到$V_2(\mathbf{F})$的线性映射σ，$V_1(\mathbf{F})$ 是其出发空间，$V_2(\mathbf{F})$ 是其到达空间，也可简记为$\sigma:V_1\to V_2$。

定义式可以分拆为以下二式：

$$\text{加性}:\sigma(\alpha+\beta)=\sigma(\alpha)+\sigma(\beta)$$
$$\text{齐次性}:\sigma(\lambda\alpha)=\lambda\sigma(\alpha)$$

注意，加法是广义的，并不只有数字加法，例如定义线性空间 $V_2(\mathbf{F})$ 为 $\{e^x\}$,加法定义为数字乘法，那么映射 $\sigma:x\to e^x$ 仍为线性映射。线性空间也是广义的，例如极限，求导，数学期望都是线性映射

性质

引入：线性映射的特点是构建了两个线性空间的关系，其出发空间和到达空间具有一定的相关性。即出发空间元素符合某些性质，那么到达空间的元素也会符合相应的性质

> 设σ是线性空间$V_1(\mathbf{F})$到$V_2(\mathbf{F})$的线性映射，则$\sigma(0_1)=0_2$

注：常见的证明 0 的方法就是作加法，加完之后发现一样

> 设σ是线性空间$V_1(\mathbf{F})$到$V_2(\mathbf{F})$的线性映射，如果V_1中向量$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$线性相关，则$\sigma(\alpha_1),\sigma(\alpha_2),...,\sigma(\alpha_n)$也线性相关.

线性相关如何用数学语言描述?

其逆否命题就是 $\sigma(\alpha_1),\sigma(\alpha_2),...,\sigma(\alpha_n)$ 线性无关，则 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ 必线性无关。

线性映射可能将线性无关的向量组映射为线性相关的向量组，如 $\sigma(x,y)=(x+y,x+y)$

例：设 σ 是线性空间 $V(F)$上的线性变换，如果 $\sigma^{k-1}(\alpha)\neq 0$，但 $\sigma^k(\alpha)=0$，证 明: $\alpha,\sigma(\alpha),...,\sigma^{k-1}(\alpha)(k>0)$ 线性无关

例：已知$\alpha_1\neq 0$，则$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$线性相关的充要条件是存在最小的$i$ $(2\leqslant i\leqslant n)$使得$\alpha_i$可由$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_{i-1}$线性表示，且表示法唯一.

计算

引入：线性映射之间的关系是什么?

加法与乘法

设$\sigma,\tau\in\mathcal{L}(V_1,V_2)$，规定 σ 与 τ 之和及 λ 与 σ 的数乘 $\lambda\sigma$ 分别为

$$(\sigma+\tau)(\alpha)=\sigma(\alpha)+\tau(\alpha),\ \ \forall\alpha\in V_1$$
$$(\lambda\sigma)(\alpha)=\lambda(\sigma(\alpha)),\ \ \forall\alpha\in V_1$$

> 线性映射全体构成线性空间 $\mathcal{L}(V_1,V_2)$与定义的线性映射加法和数乘构成域$\mathbf{F}$上的线性空间.

复合

设$\sigma\in\mathcal{L}(V_1,V_2)$，$\tau\in\mathcal{L}(V_2,V_3)$，则$\tau\sigma$是$\mathcal{L}(V_1,V_3)$中的元素，且$\tau\sigma(\alpha)=\tau(\sigma(\alpha))$，$\forall\alpha\in V_1$.

> 复合映射 $\tau\sigma$ 是线性映射.
>
> 线性映射的复合有结合律

求逆

设 $\sigma\in\mathcal{L}(V_1,V_2)$. 若存在 $\tau\in\mathcal{L}(V_2,V_1)$ 使得 $\sigma\tau=I_{V_2}$ 且 $\tau\sigma=I_{V_1}$，则称 σ 可逆，并称 τ 为 σ 的逆映射其中 I_{V_1} 和 I_{V_2} 分别是 V_1 和 V_2 上的恒等映射，即 $I_{V_i}(\alpha)=\alpha$，$\forall\alpha\in V_i$，$i=1,2$.

> 逆映射 σ^{-1} 为线性映射

像空间和核空间

引入：函数的三要素包含定义域和值域，研究映射的性质通常从映射可以到达的空间（即像空间），以及出发空间中对结果没有贡献的元素（即核空间）开始，这两条性质又与出发空间有关。

定义

> 设σ是线性空间$V_1(\mathbf{F})$到$V_2(\mathbf{F})$的线性映射。V_1的所有元素在σ下的像组成的集合，$\sigma(V_1)=\{\beta \mid \beta=\sigma(\alpha), \ \alpha\in V_1\}$称为$\sigma$的像，记作$\operatorname{im}\sigma$，或记作 $\operatorname{range}\sigma$。$V_2$的零元$0_2$在$\sigma$下的完全原像 $\sigma^{-1}(0_2)=\{\alpha \mid \sigma(\alpha)=0_2, \ \alpha\in V_1\}$ 称为σ的核记作$\ker\sigma$，或记作 $\operatorname{null}\sigma$。

> 像空间和核空间都是子空间。

例：设τ为$\mathbf{R}^n$上任一线性变换，I为$\mathbf{R}^n$上恒等变换，证明：$\ker\tau\subseteq im(I-\tau)$. 又$im\tau\subseteq\ker(I-\tau)$是否一定成立?

例：定义线性映射 $T:\mathbf{R^n}\to\mathbf{R^n}$ 如下：对任意的 $(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathbf{R^n}$

$T(x_1,x_2,\ldots,x_n)=(x_1+x_2,x_2+x_3,\ldots,x_n+x_1)$

试给出 T 的核 $\ker\ (T)$ 和 T 的像 $im\ (T)$.

线性映射的确定

引入：两个函数相等当且仅当它们的定义域相等且对于任意定义域内的元素，它们的函数值相等。线性映射则有更好的性质，即有限维空间上的线性映射可以被基上的像唯一确定

常见的证明线性映射性质的方式为选取一组基并扩张。

> 映射在一组基上的像确定了，则映射是唯一的

> 若线性映射 $T_1,T_2:V\to W$ 对 V 的一组基中的每一个基向量 v 满足 $T_1(v)=T_2(v)$，则 $T_1=T_2$.

设$B=\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\}$是$V_1$的基，$S=\{\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n\}$是$V_2$中任意$n$个向量，则存在唯一的$\sigma\in\mathcal{L}(V_1,V_2)$使得$\sigma(\alpha_i)=\beta_i$，$i=1,2,\ldots,n.$

> 仅给定了一组线性无关的元素的像，则存在且不唯一。

例：判断：给定线性空间 V 的非零向量 v 和线性空间 W 的向量 w，总存在线性映射 $T:V\to W$ 使得 $T(v)=w$

例：是否存在$\mathbf{R}^3$到$\mathbf{R}^2$的线性映射σ使得$\sigma(1,-1,1)^{\mathrm{T}}=(1,0)^{\mathrm{T}}$，$\sigma(1,1,1)^{\mathrm{T}}=(0,1)^{\mathrm{T}}$?

例：线性空间V的任何子空间W都是某个映射$T:V\to V$的核.

线性映射基本定理

引入：用数字定量描述像空间，核空间，出发空间，线性映射

> 设$\sigma\in\mathcal{L}(V_1,V_2)$，如果$\sigma(V_1)$是$V_2$的有限维子空间，则$\sigma(V_1)$的维数称为$\sigma$的秩，记作$r(\sigma)$，即$r(\sigma)=\dim\sigma(V_1)$ 。

判断：已知 $\sigma\in L(V,\ V)$，$dimV=n$，则由 $r(\sigma)+dim(ker\sigma)=n$ 可得$Im\sigma+ker\sigma=V$;

判断：若线性映射 $T:V\to W$ 的核是 K，则 $\mathrm{dim}V=\mathrm{dim}W+\mathrm{dim}K$.

例：设 $\sigma\in\mathcal{L}(V,V)$, $dimV_1=n$，且 $\sigma^2=\sigma$，I 是 V 上的恒等变换.

证明：（1） $(I-\sigma)(V)\in ker\sigma$；(2)$r(I-\sigma)+r(\sigma)=n$

例：若 $\sigma^2=\sigma$，证明 $V=ker\sigma\oplus im\sigma$

例：已知 V 为有限维线性空间，$\sigma\in(V,V)$，且 σ^2是零映射. 证明：(1)σ的像空间维数不超过 $\frac{n}{2}$；(2) 设 A 是σ 在某组基下的矩阵，则方程组AX=0的基础解系至少有 $\frac{n}{2}$ 个解.

注意矩阵形式

常见的证明线性映射性质的方式为选取一组基并扩张。

> 对于$\sigma: V_1\to V_2$，$dim\,\mathrm{im}\,\sigma+dim\ker\sigma=dim\,V_1$

> 对$\sigma\in\mathcal{L}(V_1,V_2)$且$\dim V_1=\dim V_2=n$，下列条件等价：

1. $\ker\sigma=\{0\}$;
2. σ为单射;
3. σ为满射;
4. σ为双射（可逆）;
5. $r(\sigma)=n$.

判断：设$\sigma\in\mathcal{L}(V)$，$\{\alpha_1,...,\alpha_n\}$是$V$的一组基，则$\sigma$可逆当且仅当$\{\sigma(\alpha_1),...,\sigma(\alpha_n)\}$是$V$的一组基;

> 不能是从低维到高维满射（2种证明方法）

例：是否存在 $\mathbf{R}^2$ 到 $\mathbf{R}^3$ 的线性映射 σ 使得
$\sigma(1,0)^{\mathrm{T}}=(1,0,0)^{\mathrm{T}}$，$\sigma(0,1)^{\mathrm{T}}=(0,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\sigma(1,1)^{\mathrm{T}}=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$

1. 无法满足将出发空间零元映射至到达空间零元则一定不是线性映射
2. 发现映射将线性相关的向量组映射到了线性无关向量组，则一定不是线性映射
3. 不存在从低维线性空间到高维线性空间的满射

例：设 V 是一个 n 维线性空间，$V=W_1\oplus W_2,\sigma\in\mathcal{L}(V,V)$. 证明$\sigma$可逆 $\Longleftrightarrow$ $V=\sigma(W_1)+\sigma(W_2)$

同构

引入：线性代数的目的之一就是找到一组基使得矩阵表示简单，那么我们需要知道什么样的空间和线性映射是等价的？这样才能再它们之间做变换

> 如果由线性空间$V_1(\mathbf{F})$到$V_2(\mathbf{F})$存在一个线性双射σ，则称$V_1(\mathbf{F})$和$V_2(\mathbf{F})$是同构的，记作$V_1(\mathbf{F})\cong V_2(\mathbf{F})$. σ称为$V_1(\mathbf{F})$到$V_2(\mathbf{F})$的一个同构映射。

> 设σ是V_1到V_2的同构映射，$S_1=\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m\}$是$V_1$的任意一组向量，
> $S_2=\{\sigma(\alpha_1),\sigma(\alpha_2),\ldots,\sigma(\alpha_m)\}$，则$r(S_1)=r(S_2)$，即同构映射保持映射前后向量组秩不变.

> 两个线性空间$V_1(\mathbf{F})$和$V_2(\mathbf{F})$同构的充要条件是它们的维数相等。

用同构的思想理解：

V是正实数全体$\mathbf{R}^+$，定义$V(\mathbf{R})$上的加法和数乘为

$$
\begin{aligned}
a\oplus b&=ab\\
\lambda\circ a&=a^{\lambda}
\end{aligned}
$$

则如上定义的$V(\mathbf{R})$是$\mathbf{R}$上的线性空间.

思考：$\mathcal{L}(V_1,V_2)$ 的维数是什么， $m\times n$ 的矩阵维数是什么，线性映射和其矩阵同构吗？

例：指出下面各组内的两个线性空间是否同构，若同构可以进一步思考同构映射的构造：

1. 最高次不超过 n-1 的多项式构成的线性空间 $R[x]_n$ 与 R^n； T
2. 全体复数在实数域上的线性空间 C(R) 与 R^2； T
3. 全体二元复向量 C^2 在实数域上构成的线性空间 $C^2(R)$ 与 $R[x]_4$； T
4. 全体二元复向量 C^2 在复数域上构成的线性空间 $C^2(C)$ 与 $L(R^4,R)$. F
5. 复数集 $\mathbf{C}$ 关于复数的加法与复数的乘法构成的复数域上的线性空间与 $\mathbf{C}^2$ 同构. F

例：设 $V(\mathbf{F})$ 是一个 n 维线性空间，$\sigma\in\mathcal{L}(V,V)$，证明：

(1) 在 $\mathbf{F}[x]$ 中有一个次数不高于 n^2 的多项式 $p(x)$ 使 $p(\sigma)=0$;

(2) σ 可逆 $\Longleftrightarrow$ 有一常数项不为 0 的多项式 $p(x)$ 使 $p(\sigma)=0$.

- 学完矩阵秩后完成

设 $\beta=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ 是 V 的一组基，$T:V\to V$ 是线性变换，$T(v_1)=v_2,T(v_2)=v_3,\ldots,T(v_{n-1})=v_n,T(v_n)=a_1v_1+a_2v_2+\cdots+a_nv_n$. 求 T 关于 β 的矩阵表示. 以及，在什么条件下 T 是同构？

矩阵表示

表示

引入：如何用一个等价的方式定量且方便计算地表示线性映射？

$$
\begin{tikzcd}
V_1 \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, shift left, "\varphi_{B_1}"] & V_2 \arrow[d, shift left, "\varphi_{B_2}"] \\
\mathbf{F}^n \arrow[r, "\sigma_{\mathbf{M}}"'] \arrow[u, shift left, "\varphi_{B_1}^{-1}"] & \mathbf{F}^m \arrow[u, shift left, "\varphi_{B_2}^{-1}"]
\end{tikzcd}
$$

> 域$\mathbf{F}$中的$m\times n$个元素$a_{ij}\quad(i=1,\ldots,m,\quad j=1,\ldots,n)$排成$m$行$n$列的矩形数表，称为域$\mathbf{F}$上的一个$m\times n$矩阵，记作

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

或简记为$(a_{ij})_{m\times n}$，其中a_{ij}表示矩阵A的第i行第j列的元素.

请勿自创矩阵的定义

向量都是列向量

> 任意的 $\mathbf{F}^n\to\mathbf{F}^m$ 的线性映射 σ 都可以写成 $\sigma(x)=Ax$ 的形式，其中 A 是一个 $m\times n$ 的矩阵，并且符合要求的矩阵是唯一的。

例：设

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad Q=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

定义$\mathbf{R}^{3\times2}$上映射σ：

$$\sigma(A)=PAQ$$

（1）验证σ是线性映射；

（2）求$im\sigma$和$\ker\sigma$；

（3）验证关于σ的维数公式.

(4) 求$\mathbf{R}^{3\times2}$的两组基B_1,B_2，使得σ在B_1,B_2下的矩阵为对角矩阵.

例：设 $\mathbf{R}[x]_4$ 是数域 $\mathbf{R}$ 上次数小于 4 的多项式所构成的线性空间 (约定零多项式次数为 $-\infty$). $\mathbf{M}_2(\mathbf{R})$ 是 $\mathbf{R}$ 上 2 阶方阵所构成的线性空间，定义 $T:\mathbf{R}[x]_4\to\mathbf{M}_2(\mathbf{R})$ 如下，对 $f(x)\in\mathbf{R}[x]_4$，

$$T(f(x))=\begin{pmatrix} f(0) & f(1) \\ f(-1) & f(0) \end{pmatrix}.$$

（1）求出 T 的核空间 $N(T)$ 和像空间 $R(T)$；

（2）验证关于 T 的维数公式.

常见错误

$$\sigma(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}=(x_1+x_2,x_1-x_3,x_2)=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

等号左边是n个向量在σ下的像，而上述解法$\sigma(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$只是$\sigma$在一个向量下的像，这显然是不一样的。等号右边括号内是到达空间的一组基，而上述解法中仍然只是一个向量。

容易导致混淆的原因可能在于我们书写(x,y,z)向量时是排列成一行的，可能看起来和(e_1,e_2,e_3)有点相似。

设$B=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}$是4维线性空间$V$的一组基，$\sigma$关于基$B$的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}1&0&2&1\\-1&2&1&3\\1&2&5&5\\2&-2&1&-2\end{pmatrix},$$

求σ的像与核.

补充题

线性映射的定义

设$V=\mathbf{R}^{4\times1}$，$W=\mathbf{R}^{3\times1}$，定义映射$T:V\to W$如下：

$$T(X)=AX=\begin{pmatrix}1&-1&0&1\\1&1&2&3\\2&2&3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix},\ \forall X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\in V$$

(1) 证明T的秩为3；

(2) 求V和 imT 的基$\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4\}$和$\{\eta_1,\eta_2\}$，使得

$$T(\varepsilon_1)=\eta_1,T(\varepsilon_2)=\eta_2,T(\varepsilon_3)=T(\varepsilon_4)=(0,0,0)^{\mathrm{T}}.$$

设$\mathbf{R}[x]_3$是次数小于等于3的实系数多项式的全体和零多项式一起组成的集合关于多项式加法和数乘构成的实数域上的线性空间.

（1）证明：$W=\{f(x)\in\mathbf{R}[x]_3\mid f(1)=0\}$是$\mathbf{R}[x]_3$的子空间，并求$\dim W$和$W$的一组基；

（2）定义从$\mathbf{R}[x]_3$到$\mathbf{R}$的映射T如下：对任意$f(x)\in\mathbf{R}[x]_3$，$T(f(x))=f(1)$，证明：T是线性映射，并求$\dim\ker T$和imT；

（3）设$f,g,h\in\mathbf{R}[x]_3$，且$f(1)=g(1)=h(1)=0$，证明：f,g,h线性相关.

构造线性映射

已经在前面的例子中给出

矩阵表示

设 $B=\{v_1,v_2,v_3\}$ 是线性空间 V 的一组基，线性映射 $\sigma:V\to V$ 定义如下：

$\sigma(v_1)=v_2+v_3,\sigma(v_2)=v_3,\sigma(v_3)=v_1-v_2$

（1）给出 σ 关于基 B 的矩阵表示.

（2）证明 $B'=\{v_2,v_3+v_1,v_1-v_2\}$ 是 V 的另一组基.

已知$f_1=1-x,f_2=1+x^2,f_3=x+2x^2$是$\mathbf{R}[x]_3$中三个元素，$\sigma$是$\mathbf{R}[x]_3$上的线性变换且满足$\sigma(f_1)=2+x^2,\sigma(f_2)=x,\sigma(f_3)=1+x+x^2$.

(1) 证明：f_1,f_2,f_3构成$\mathbf{R}[x]_3$的一组基；

(2) 求σ在基$\{f_1,f_2,f_3\}$下的矩阵；

(3) 设$f=1+2x+3x^2$，求$\sigma(f)$.

映射 $T:\mathbf{R^3}\to\mathbf{R^2}$ 由 $T(x_1,x_2,x_3)=(2x_1+3x_2-x_3,x_1+x_3)$ 定义.

(1) 证明 T 是线性映射.

(2) 给出 T 关于 $\mathbf{R^3}$ 和 $\mathbf{R^2}$ 的标准基的矩阵表示.

(3) 给出 T 的核 $\ker(T)$ 的一组基.

核与像

判断：线性方程组有 m 个方程，n 个变量，且 $m<n$，则这个方程组一定有非零解.

记线性映射 σ 的核为 $\ker\sigma$，像为 $im\,\sigma$. 设 $\sigma_1,\sigma_2:V\to V$ 是线性映射. 证明：

$\ker\sigma_1\subseteq\ker(\sigma_2\circ\sigma_1)$.

$im\,(\sigma_2\circ\sigma_1)\subseteq im\,\sigma_2$.

设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是线性空间$V$的一组基，$T\in\mathcal{L}(V)$，且$T(\alpha_1)=\alpha_1+\alpha_2$，$T(\alpha_2)=\alpha_1-\alpha_2$，$T(\alpha_3)=\alpha_1+2\alpha_2$. 求$T$的像空间和核空间，以及$T$的秩.

定义实数域上的线性空间$\mathbf{R}^n$到自身的映射T如下：

$$\forall X=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathbf{R}^n,\ \ T(X)=(x_1-x_2,x_2-x_3,\ldots,x_{n-1}-x_n,x_n-x_1).$$

(1) 验证$T\in\mathcal{L}(\mathbf{R}^n)$；

(2) 求T的像空间，和T核空间的维数.

已知$\mathbf{R}^2$上的线性变换$\sigma(x_1,x_2)=(x_1-x_2,2x_1-2x_2)$，$I$为$\mathbf{R}^2$上的恒等变换，求$\ker\sigma$和$im(I-\sigma)$
;

已知$\mathbf{R}^3$的两个线性变换σ,τ为

$$\begin{gathered}\sigma(x_1,x_2,x_3)=(x_1+2x_2+3x_3,-x_1+2x_2-x_3,0),\\ \tau(x_1,x_2,x_3)=(x_2,x_3,0)\end{gathered}$$

(1) 求$r(\sigma+\tau)$和$r(\sigma\tau)$;
(2) 求$im\sigma+\ker\sigma$.

线性映射基本定理

已经在前面的例子中给出

同构

定义 $\mathbf{R}_3[x]=\{a_2x^2+a_1x+a_0 \mid a_0,a_1,a_2\in\mathbf{R}\}$. 设 $\mathbf{R}_3[x]$ 对 $\mathbf{R}^{2\times 2}$ 的映射 σ 满足:

$$\sigma(p(x))=\begin{pmatrix} p(1)-p(2) & 0\\ 0 & p(0)\end{pmatrix}$$

(1) 证明：σ 为线性映射.

(2) 试分别写出 $\mathbf{R}_3[x],\mathbf{R}^{2\times 2}$ 上的两组基 B_1,B_2，并求出 σ 关于这两组基的矩阵.

(3) 求 $\mathrm{Im}\sigma,\ker\sigma$.

(4) 分别给出 $\mathbf{R}_3[x]$ 的一个与 $\mathrm{Im}\sigma$ 同构的子空间，和 $\mathbf{R}^{2\times 2}$ 的一个与 $\mathrm{Ker}\sigma$ 同构的子空间.