(线性空间:)

①

(群环域基本概念和例子的认识)

[介绍群,环域的基本概念和性质. 并最终引出线性空间的定义]

definition1(直积). 对集合 X, Y 我们定义集合 $X\times Y=\{(x,y)\mid x\in X, y\in Y\}$

definition2(半群). 我们对于集合 X. 若存在一个映射 $f: X\times X\longrightarrow X$ (*)

并由此(*)保证了封闭性 得到定义一种 二元运算:

若 $x_1\in X$, $x_2\in X$, $f(x_1,x_2)=x_3\in X$, 则我们定义 $x_1\circ x_2=x_3$

[(我们之后对于群上的运算,环上的运算 都可用映射理解)]

进一步地,若这种作用满足结合律 $(x_1\circ x_2)\circ x_3=x_1\circ(x_2\circ x_3)$, 那么,

我们说 X 在这种作用下是一个半群, 记为 $(X,\circ)$

进一步地,如果这种作用还满足交换律 $(x_1\circ x_2)=(x_2\circ x_1)$, 那么

我们称 $(X,\circ)$ 是一个交换半群

example2.1. 我们考虑集合 $X=\{f\mid f: S\longmapsto S\}$ (Remark: 即 f 为 S 上的映射)

则集合 X, 在映射的复合的作用下是一个半群,但往往不是一个交换半群.

[对于 $f: S\to S$, $g: S\to S$ 显然 $f\circ g: S\to S$ (依旧), 且满足结合律]

$(f\circ g)\circ r=f\circ(g\circ r)$

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right] & S \arrow[r, "f"] & S \end{tikzcd}$$

从而是半群.

若 $S=\{1,2,3\}$. 考虑 $f: S\longmapsto S$, $f\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$

$g: S\longmapsto S$, $g\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$

我们有 $f\circ g\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$

$g\circ f\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$

$f\circ g\neq g\circ f$ 从而非交换半群.

example 2.2 自然数集关于我们熟悉的加法作用"+"和乘法作用"·"都各构成一个交换半群 $(\mathbb{N},+)$ $(\mathbb{N},\cdot)$

接下来 level up. 半群 ⟶ 群.

definition 3.

(i). 若 $(X,\circ)$ 半群. 且有下列性质:

(单位元) 存在 $e\in X$ 使对 $\forall x\in X$, $e\circ x=x\circ e=x$. 我们称 e 为 X 的单位元.

(逆元) 对任意 $x\in X$. 存在 $y\in X$. 使 $x\circ y=y\circ x=e$. 元素 y 称为 x 的逆元

则称 X 为一个群. 二元作用"∘"称为群运算.

(注意: 我们这里只说了存在性)

(Remark:
群公理 { 群运算结合律
单位元
逆元)

(ii) 若群 $(X,\circ)$ 群运算有交换律. 则 $(X,\circ)$ 称为交换群.

注: 交换群中. 我们常用"+"来表示. 此时称一个交换群 $(A,+)$ 为加法群. 其单位元记为 0_A 或 0. 群元素 a 逆元记为 $-a$.

接下来. 证明一些群 X 简单的性质.

Proposition. 3.1. (i) 群 X 单位元唯一

(ii) 群 X 的任意元素 x 的逆元总是唯一的. 记为 x^{-1}, 并 $(x^{-1})^{-1}=x$.

prove: (i) 反证. 若有两个单位元 e, e'. 则有

$e\circ e'=e=e'$ (分别将 e 与 e' 视作单位元)

矛盾! ∴ 单位元唯一.

(ii) 若存在 y, y' 均为 x 的逆元，有

$$xy = e,$$

$$\Rightarrow y'(xy) = y' \circ e = y'$$

$$\text{又}.\ (y'x)y = e \circ y = y$$

$$\xrightarrow{\text{结合律}} y'(xy) = (y'x)y = y' = y'.\ \text{从而 } x \text{ 的逆元唯一}.$$

由于 $(x^{-1})^{-1} \cdot x^{-1} = e \Rightarrow (x^{-1})^{-1} \cdot x^{-1} \cdot x = ex$

$$\Rightarrow (x^{-1})^{-1} e = ex$$

$$\Rightarrow (x^{-1})^{-1} = x. \quad ①$$

由于 x^{-1} 逆元唯一性.

$(x^{-1})^{-1} = x$.

从而我们说明了群 G 的单位元和逆元的唯一性

example 3.1. (i) $(\mathbb{Z}, +)$ $(\mathbb{Q}, +)$ $(\mathbb{R}, +)$ $(\mathbb{C}, +)$ 它们关于加法都构成交换群. 它们的单位元均为 0

(ii) $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ 关于乘法都构成交换群. 它们的单位元均为 0. (why. $(\mathbb{Z}^*, \cdot)$ 不构成群结构?)

(无逆元)

example 2.2.

(iii) 刚才我们提到的定义在自然数加群的 $(\mathbb{N}, +)$ 不构成群结构 (因为逆元的缺失)

$|X| \geq 2$. 不然讨论无意义.

(iiii) 刚才我们 example 2.1 提到的定义在全体 X 到 X 映射的集合 (我们记作 S_X) 上的半群不构成群结构 (因为逆元缺失)

那么什么样的映射保证存在逆元 g 使 $f\circ g = g\circ f = id_X$ 呢?

f 有逆映射 $\Leftrightarrow$ f 是一个双射。（不证明）

我们考虑全体 X 到 X 双射的集合（这个为 X 的自同构群，记 $Aut(X)$）

不难验证，这个集合关于映射复合是一个半群，进一步，由于单位元和逆元的保证，从而 $(X,\circ)$ 为一个群，我们称 $(X,\circ)$ 为一个对称群。

注：对称群在 $|X|\geq 3$ 时为非交换的。

level up.

群 $\Longrightarrow$ 环 $\Longrightarrow$ 域.

definition 4.(1) 对于一个加群，$(X,+)$，若 X 中存在二元运算 "·"（称为 X 上的乘法），使得：

① $(X,\cdot)$ 是一个半群. （半群给予了我们"·运算上的"：封闭性、结合律）

② 对于所有的 $x,y,z\in X$，有

$$x\cdot(y+z) = x\cdot y + x\cdot z\ ,\quad (y+z)x = y\cdot x + z\cdot x.$$

（左、右分配律）

则称 $(X,+,\cdot)$ 是一个环，此时 $(X,+)$ 的单位元 0_X 为环的零元.

（问：$x,y\in X$，$(x+y)(x+y) = ?$）

(2) 若环 $(X,+,\cdot)$ 满足对"·运算"有交换律，我们称 X 为交换环.

插入两个例子讲解：

① $\mathbb{Z}$ 即为环（交换环）. ② 矩阵空间 $\mathbb{Z}_{2\times 2}$ 为环，但是非交换环

(iii) 若环 X 包含运算"·"的单位元，记为 $\mathbb{1}_X$，使得 $\forall x \in X$，

$$\mathbb{1}_X \cdot x = x \cdot \mathbb{1}_X = x.$$

则称 X 为具有单位元 $\mathbb{1}_X$ 的环（含幺环，$\mathbb{1}_X$ 也可称为乘法幺元）

(这里插入 $2\mathbb{Z}$ 例子讲解. $2\mathbb{Z}$ 是环（交换环），但不含幺. 而 $\mathbb{Z}$ 含幺.)

(iv) 若含幺环 $(X,+,\cdot)$ 中 $\mathbb{1}_X \neq 0_X$，且 $(X\setminus\{0_X\},\cdot)$ 是以 $\mathbb{1}_X$ 为单位元的群，则称 D 是一个除环，此时群 $(X\setminus\{0_X\},\cdot)$ 常记为 X^*.

(这里介绍性质 $\forall x\in X$. $0_X\cdot X = X0_X = 0_X$，说明了零元在乘法运算下是没有逆元的)

(前提 $\mathbb{1}_X \neq 0_X$)

(v) 若 F 是除环且关于乘法·的群 $(F\setminus\{0_F\},\cdot)$ 是一个交换群，则称 $(F,+,\cdot)$ 是一个域. (我什么都不知道了 (bushi))

插入例子：

$\mathbb{H}=\{a+bi+cj+dk \mid a,b,c,d\in\mathbb{R},\ ij=k=-ji,\ jk=i=-kj,\ ki=j=-ik.\}$ 的介绍.(但不证明了)

除环但非交换

example 4.1. 可以发现，整数交换群 $(\mathbb{Z},+)$ 关于乘法构成交换环 $(\mathbb{Z},+,\cdot)$，但这并不是一个域[因为显然 2 没有乘法逆元]. 而对于同样加法、乘法定义的 $(\mathbb{Q},+,\cdot)$ $(\mathbb{R},+,\cdot)$ $(\mathbb{C},+,\cdot)$ 均构成域，零元为 0. 乘法幺元为 1.

example 4.2. 对于任意域 F. 可以定义全体以 F 中元素作为系数的多项式为一个多项式环（关于多项式的加法和乘法）

记作 $F[x]$. 很重要的一个环结构

example 4.3. 我们这里先来探究一些特殊的域.

目前我们对域的认识停在 $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ 上. 进一步的

我们定义数域的概念, F为数域 ⟺ F上的"+""与"·"运算即为我们熟知的数之间的"+""与"·"运算.

不难发现. 由于 $0, 1 \in F \Rightarrow \mathbb{Z} \subset F$. (F关于加法封闭)

$\Rightarrow \mathbb{Q} \subset F$ (F关于乘法和除法封闭)

∴一个域如果是个数域. 至少为 $\mathbb{Q}$.

我们来观察一个特殊的数域 $\mathbb{Q}(\sqrt{p}) = \{a + b\sqrt{p} \mid p$ 为非完全平方数. $a, b \in \mathbb{Q}\}$

易验证这即是一个数域.

example 4.4. 最后会我们介绍一种域.

设n为正整数, 在整数模n的同余类集

$\mathbb{Z}_n = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \cdots, \overline{n-1}\}$ 上

定义加法 $\bar{i} + \bar{j} = \overline{i+j}$. 乘法 $\bar{i}\bar{j} = \overline{ij}$

那么. 不难发现有 $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ 构成一个交换环.

零元为 $\bar{0}$.

乘法幺元为 $\bar{1}$

但注意, 这里 $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ 不是域!

为什么? ⟹ 因为这里无法保证

$(\mathbb{Z}_n \setminus \{\bar{0}\}, \cdot)$ 中每个元素都有逆元

比如. 若 $2 \mid n$. 取 $\bar{2}$. 显然

$\forall \bar{i}$. $\bar{2}\,\bar{i} = \overline{2i} \neq \bar{1}$ (否则 $n \mid 2i-1 \Rightarrow 2 \mid 2i-1 \Rightarrow 2 \mid n$?)

⟹ 我们发现, 若存在. $d \mid n$. $d \neq 1$, $d \neq n$.

则有 $\bar{i}$ 在 $\mathbb{Z}_n$ 中既非 $\bar{0}$ 也非 $\bar{1}$ 且在 $(\mathbb{Z}_n\setminus\{\bar{0}\},\cdot)$ 中无逆元

⇒ 所以……

只有当 n 为素数时，$\mathbb{Z}_n$ 才有可能为一个域。

那么现实如何呢？

对于一个 $\mathbb{Z}_p$ 而言，

$(\mathbb{Z}_p\setminus\{\bar{0}\},\cdot)$ 中 $\forall\ \bar{i}\in(\mathbb{Z}_p\setminus\{\bar{0}\})$

取 $\quad i,\ 2i,\ 3i,\ \cdots,\ (p-1)i$

此时 $\forall\ s,t\in\{1,2,\cdots,p-1\}\quad s\neq t$

$$p\nmid si-ti=(s-t)i$$

$\therefore\ \bar{i},\ \overline{2i},\ \cdots,\ \overline{(p-1)i}$ 互不相同

且 $\bar{i},\ \overline{2i},\ \cdots,\ \overline{(p-1)i}$ 均非 $\bar{0}$

$\therefore\ \{\bar{i},\overline{2i},\cdots,\overline{(p-1)i}\}=\{\bar{1},\bar{2},\cdots,\overline{p-1}\}$

$\therefore$ 有 $\exists\, j\in\{1,2,\cdots,p-1\}\quad \overline{ji}=\bar{j}\,\bar{i}=\bar{1}$

即 $\bar{i}$ 存在逆元，$(\mathbb{Z}_p\setminus\{\bar{0}\},\cdot)$ 为交换群结构

$\therefore\ \mathbb{Z}_p$ 为域。

（回到刚才环上多项式

这意味着我们可定义

$\mathbb{Z}_p[x]$ ☆）

称为模 p 的剩余类域

③ 线性表示 & 线性关系.

definition 1.1 设 $\beta, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 均为 V 中元素, 若存在 $c_1, c_2, \cdots c_r \in F$ 使

$$\beta = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \cdots + c_r\alpha_r$$

则称 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性表示, 并称 $c_1, c_2, \cdots, c_r$ 为系数.

既然有了线性表示的概念, 我们自然会问.

同样的 $\beta, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$. 若 β 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_r$ 线性

表示, 那这样的线性表示是否唯一呢?

(课上简述)

我们不难看出, 表示法唯一 $\Leftrightarrow$ 只有当 $c_1, c_2, \cdots, c_r$ 全为0时, 表达式

$$c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \cdots + c_r\alpha_r = 0$$

严谨化一下我们的语言, 我们得到了关于线性无关的定义.

definition 1.2 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ $(\alpha \geq 1)$ 是域 F 上线性空间 V 中

的一个向量组.

(1). 若对任意 $c_1, c_2, \cdots, c_r \in F$. 当

$$c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \cdots + c_r\alpha_r = 0$$

时必有 $c_1 = c_2 = \cdots = c_r = 0$. 则称 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性无关.

反之则称线性相关 (也是一对非此即彼的概念)

(∃ $c_1, c_2, \cdots c_r \in F$ 不全为0. $c_1\alpha_1 + \cdots + c_r\alpha_r = 0$

则称 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性相关)

example 1.1 对于 $\mathbb{R}^2$ 中两个向量, 线性相关 $\Leftrightarrow$ 两向量共线

对于 $\mathbb{R}^3$ 中三个向量, 线性相关 $\Leftrightarrow$ 三向量共面.

example. 1.2 (i) $\log p_1, \log p_2, \ldots, \log p_n$, 其中 $p_1, p_2, \ldots, p_n$ 是不同的素数; (上课讲)

(i) 证明 $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ 中的函数族 $x \mapsto e^{ax}$ 线性无关, 其中 $a \in \mathbb{R}$. (上课讲)

(ii) $\sqrt{d_1}, \sqrt{d_2}, \ldots, \sqrt{d_n}$, 其中 $d_1, d_2, \ldots, d_n$ 是不同的无平方因子的正整数; (有点难，当思考题)

example 1.3. (请直接将F当作$\mathbb{Z}_q$. 不用管什么q元有限域)

13. 设 F 为 q 元有限域. 对 $1 \leqslant m \leqslant n$, 令 X_m 为 F^n 的有序线性无关组 $(v_1, v_2, \ldots, v_m)$ 构成的集合. 求证

$$|X_m| = (q^n - 1)(q^n - q) \cdots (q^n - q^{m-1}).$$

(看时间)

④ 极大线性无关集与向量集的秩.

definition 1.1 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是线性空间 V 中向量组 S 的一个部分组. 若

(i). $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关.

(ii) 向量组 S 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性表示

则称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 为向量组 S 的一个极大线性无关组.

Theorem 1.1 若线性空间 V 中向量组

$\alpha=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_m\}$ 与 $\beta=\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n\}$

可以互相线性表示. 且 α 与 β 均线性无关. 那么有 $m=n$.

不妨设 $m\geq n$. 接下来

pf: 我们对 n 归纳.

当 $n=1$ 时. 由 α 可被 β 线性表示, 若 $m>n$. 则 $m\geq 2$. 则有

$$\begin{cases}\alpha_1=k_1\beta_1\\ \alpha_2=k_2\beta_2\end{cases}$$

由 α 线性无关 $\Rightarrow k_1\neq 0.\ k_2\neq 0$

$\Rightarrow k_2\alpha_1-k_1\alpha_2=0$. 由 $k_1\neq 0.\ k_2\neq 0\Rightarrow\alpha$ 线性相关. 矛盾!

$\therefore m=n$.

设当 n 时已成立. $n=k$ 时.

由 α 可被 β 线性表示. 若 $m>k$, 则 $m\geq k+1$.

$\alpha_1=k_{11}\beta_1+\cdots+k_{1k}\beta_k$

$\alpha_2=k_{21}\beta_1+\cdots+k_{2k}\beta_k$

$\vdots$

$\alpha_{k+1}=k_{(k+1)1}\beta_1+\cdots+k_{(k+1)k}\beta_k$

若 $k_{1k}=k_{2k}=\cdots=k_{(k+1)k}=0$

则 $\{\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_{k+1}\}$ 可被 $\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{k-1}\}$ 线性表示且

两个向量组均线性无关 $\Rightarrow k+1=k-1\Rightarrow$ 矛盾!

$\therefore$ 不妨设 $k_{(k+1)k}\neq 0$

令 $\alpha_i'=\alpha_i-\dfrac{k_{ik}}{k_{(k+1)k}}\alpha_{k+1}$, 我们有 $\{\alpha_1',\alpha_2',\cdots,\alpha_k'\}$ 被 $\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{k-1}\}$ 线性表示

$(i=1,2,\cdots,k)$

若存在 $c_1,c_2,\cdots,c_k$. $(i=1,2,\cdots k)$

令 $\sum_{i=1}^{k}c_i\alpha_i'=0\Rightarrow\sum_{i=1}^{k}c_i(\alpha_i-\dfrac{k_{ik}}{k_{(k+1)k}}\alpha_{k+1})=0$. 由 α 线性无关与 α_i 前系数均为 c_i

知 $c_1=c_2=c_3=\cdots=c_k=0$

进而推得 $\alpha_1', \alpha_2', \cdots, \alpha_k'$ 线性无关.

又 β 线性无关. 由归纳假设, 有 $k = k-1$ 矛盾!

综上有 $m \le k = n \Rightarrow m = n$. 归纳递推完毕

综上归纳完毕.

Remark: ① 即得推论, 若 $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ 线性无关.

$\beta = \{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m\}$ 可被 α 线性表示. . .

a) 若 $m > n \Rightarrow \beta$ 线性相关

b) 若 β 线性无关 $\Rightarrow m \le n$.

由 Thm 1.1 我们说明了对于一个集合 S. 若其存在极大线性无关组, 那么这些极大线性无关组的向量个数是一样的. 即 向量组 S 的极大线性无关组的向量个数 r 与极大线性无关组的选取无关!, 我们把这个个数称为向量组 S 的秩, 记为 $r(S) = r$.

接下来我们考虑极大线性无关组的存在性
(意味着 $|S| < +\infty$)

Thm. 1.2. 若 S 为一个向量组 则 S 必有极大线性无关组.

(tip: 令 $A_1 = \{\alpha_1\}$. ($\alpha_1 \in S$)

选 $\alpha_2 \notin \operatorname{Span} A_1$. 令 $A_2 = A_1 \cup \{\alpha_2\}$

不断递归构造 A_i.

直到 $|S|$ 中元素被取完 或 $S \subset \operatorname{Span} A_i$ 为止.

此时 A_i 即 S 的一个极大线性无关组 (why?))

Thm 1.3. 线性空间 V 中. 向量组 S 的秩为 r, 则 S 的任意线性无关部分组一定可扩充成 S 的一个极大线性无关组.

那么对于一般的向量组Γ（Γ可以无限）

我们定义

definition 1.2. 若Γ是线性空间V的子集.

(i) 若Γ任意有限子集都是线性无关的，则称Γ是线性无关的.

(ii) 若Γ包含一个线性相关的有限子集，则称Γ是线性相关的.

definition 1.3 若Γ是线性空间V中向量集S的一个子集若

(i) Γ是线性无关集

(ii) S可由Γ线性表示，即任意$\alpha\in S$均可由Γ的某个有限子集表示

（通过Zorn引理，我们可证明任意线性空间中的向量集S都有一个极大线性无关集.但由于之后我们课程中，基本不会碰到无限维情况，故这里不多说）

（遇到也会很容易看出什么当作极大线性无关集）.

definition 1.4.

定义 5.2.1 设 Γ 是域 F 上线性空间 V 的一个极大线性无关集，且 Γ 上有一个良序.
(i) 称这个有序的极大线性无关集 Γ 为 V 的一组**基**.
(ii) 当 $|\Gamma|$ 无限时，称 V 是**无限维的**，记为 $\dim_F V=+\infty$.
(iii) 当 $|\Gamma|=n$ 有限时，称 V 是**有限维的**，称 n 为 V 的**维数**，记为 $\dim_F V=n$.
当域 F 明确时，$\dim_F V$ 常简记为 $\dim V$.

（Remark：这里阐述一下.若V有一个有限的极大线性无关组S.则其它的极大线性无关组也必然有限且个数一样.从而我们定义的维数才是良定的）

用Thm 1.1.

设 $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ 是域 F 上线性空间 V 的一组基. 由定理 4.3.2, 对任意向量 $v \in V$ 存在唯一的一组元素 $x_1, x_2, \ldots, x_n \in F$ 使得

$$v = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = (\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \cdots \quad \alpha_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \tag{5.1}$$

此时称 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in F^n$ 为 v 在基 α 下的**坐标**或**坐标向量**, 记为 $[v]_\alpha$, 并称 x_i 为 v 在基 α 下的第 i 个坐标, $i = 1, 2, \ldots, n$. 显然对任意 $x_1, x_2, \ldots, x_n \in F$, $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n$ 是 V 中唯一在基 α 下以 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ 为坐标的向量. 由此即得如下关键事实:

(这也映证了我们之前为什么会称为向量组/向量组)

事实 5.2.1 设 α 是域 F 上 n 维线性空间 V 的一组基. 那么有双射 $V \to F^n$, $v \mapsto [v]_\alpha$.

(这个由极大线性无关组线性无关从而线性表示唯一即可说明)

example 1.1. 求 $\mathbb{R}^3$ 作为 $\mathbb{R}$-线性空间 的一组基

example 1.2. 求 $\mathbb{C}$ 作为 $\mathbb{R}$ 线性空间的一组基.

example 1.3. (i) 求 $F_n[x]$ 的一组基 ($n \in N^+$).

(ii) 求 $F[x]$ 的一组基. (无限维)

Thm 1.4. 若 W 为有限维线性空间 V 的子空间, 则 W 也是有限维. 且 $\dim W \leq \dim V$.

(tips: 取 V 一组极大线性无关组 $\alpha = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$

则 W 中任意线性无关组均可被 α 表示

$\Rightarrow$ W 中任意线性无关组数目不超过 n.

$\Rightarrow$ 其极大线性无关组必有限从而存在从而小于等于 n.

$\Rightarrow$ $\dim W \leq \dim V$)

example 1.4 实数线性空间 $V=\{f(x)\in\mathbb{R}[x]_n \mid f(1)=0\}\subseteq\mathbb{R}[x]$.

求 V 的一组基和维数.(上课讲)