第二次辅学讲义

线性映射及其矩阵表示 + 期中复习

授课内容：

1.线性映射的定义，运算与常用性质

2.线性映射的像空间与核空间定义

3.线性映射的确定

4.维数公式与其证明思想及例题

5.单射有关结论

6.秩等式与不等式

7.同构的定义，等价条件

8.矩阵的引入、矩阵与线性映射的等价

9.近两年期中卷题目选讲

线性映射

1 定义：

线性空间$V_1(F)$到$V_2(F)$的一个映射σ是线性的，如果$\forall \alpha, \beta \in V_1, \forall \lambda, \mu \in F$,都有$\sigma(\lambda\alpha + \mu\beta) = \lambda\sigma(\alpha) + \mu\sigma(\beta)$，其中$V_1$称为出发空间，$V_2$称为到达空间，若$V_1 = V_2$，可称为线性变换。

定义中的$\sigma(\lambda\alpha + \mu\beta) = \lambda\sigma(\alpha) + \mu\sigma(\beta)$也可写作$\begin{cases} \sigma(\alpha+\beta) = \sigma(\alpha) + \sigma(\beta) \\ \sigma(\lambda\alpha) = \lambda\sigma(\alpha) \end{cases}$，这是等价的。

2 性质：

设$\sigma : V_1 \to V_2$

(1)

$$\sigma(0_1) = 0_2 \tag{1}$$

注意上式中的两个0向量分别来自于V_1, V_2，可能是不同向量

(2)

$$\begin{gathered}\text{若}V_1\text{中的向量}\alpha_1,\alpha_2...\alpha_n\text{线性相关，则}\sigma(\alpha_1),\sigma(\alpha_2)...\sigma(\alpha_n)\text{线性相关}\\ \Leftrightarrow\text{若向量}\sigma(\alpha_1),\sigma(\alpha_2)...\sigma(\alpha_n)\text{线性无关，则}\alpha_1,\alpha_2...\alpha_n\text{线性无关}\end{gathered}\tag{2}$$

由性质(2)可直接推出:

$$r(\alpha_1,\alpha_2...\alpha_n)\geq r(\sigma(\alpha_1),\sigma(\alpha_2)...\sigma(\alpha_n))\tag{3}$$

3 运算:

设$\sigma:V_1\to V_2,\tau:V_2\to V_3$

加法与数乘:

$$\begin{gathered}(\sigma+\tau)(\alpha)=\sigma(\alpha)+\tau(\alpha)\\ (\lambda\sigma)(\alpha)=\lambda\sigma(\alpha)\end{gathered}\tag{4}$$

在定义了加法和数乘后，可以证明$L(V_1,V_2)$构成域F上的线性空间。

复合:

$$(\tau\circ\sigma)(\alpha)=\tau(\sigma(\alpha))\tag{5}$$

复合运算满足结合律

逆:

$$\text{若}\exists\sigma^{-1}\in L(V_2,V_1),\text{使得}\sigma^{-1}\circ\sigma=\sigma\circ\sigma^{-1}=I\text{，则称该映射}\sigma^{-1}\text{为}\sigma\text{的逆}\tag{6}$$

例题:

$$\begin{gathered}\text{设}\sigma\in L(V,V),\sigma^k(\alpha)\neq 0,\sigma^{k+1}(\alpha)=0\\ \text{证}:\alpha,\sigma(\alpha),\ldots,\sigma^k(\alpha)\text{线性无关}\end{gathered}\tag{7}$$

线性映射的像与核

定义:

设$\sigma:V_1\to V_2$

$V1$的所有元素在σ下的像组成的集合

$$\sigma(V_1)=\left\{\beta|\beta=\sigma(\alpha),\alpha\in V_1\right\}\tag{8}$$

称为σ的像，记作$im\sigma$，并将$\dim im\sigma$定义为线性映射σ的秩$r(\sigma)$

$V2$的零元0_2在σ下的完全原像

$$\sigma^{-1}(0_2)=\left\{\alpha|\sigma(\alpha)=0_2,\alpha\in V1\right\}\tag{9}$$

称为σ的核，记作$\ker\sigma$

直接套用定义可证明，$im\sigma$与$\ker\sigma$均为线性空间

基础题型：求解$im\sigma$与$\ker\sigma$

(1)求解$im\sigma$

方法：找出出发空间V_1的一组基$\alpha_1,\alpha_2...\alpha_n$则像空间$im\sigma=span(\sigma(\alpha_1),\sigma(\alpha_2)...\sigma(\alpha_n))$，即一组基的像的线性扩张。

(2)求解$\ker\sigma$

方法：令$\sigma(\alpha)=0$，后直接求解即可，注意$\ker\sigma$至少为$\{0\}$，不可能为空集。

例题：已知R^3到R^2的映射σ为$\sigma(x1,x2,x3)^T=(x1+x2,x2-x3)^T$，求$\sigma$的像和核

核空间不减性质

(1)

$$0=\ker\sigma^0\subseteq\ker\sigma^1\subseteq\cdots\subseteq\ker\sigma^k\subseteq\ker\sigma^{k+1}\subseteq\cdots; \tag{10}$$

(2) 设m是非负整数使得$\ker\sigma^m=\ker\sigma^{m+1}$，则

$$\ker\sigma^m=\ker\sigma^{m+1}=\ker\sigma^{m+2}=\ker\sigma^{m+3}=\cdots \tag{11}$$

(3)

$$\begin{gathered}\text{令}n=\dim V,\\ \text{则}\ker\sigma^n=\ker\sigma^{n+1}=\ker\sigma^{n+2}=\cdots\end{gathered} \tag{12}$$

线性映射的确定

我们已经有了许多刻画线性映射的工具，接下来通过这些工具讨论如何通过这些工具唯一确定一个线性映射，并借此提供了研究一个线性映射时极其有用的视角

$$\begin{gathered}\text{设线性映射}\sigma,\tau\in L(V,W),\{\alpha_1,\alpha_2...\alpha_n\}\text{为}V\text{中的一组基}\\ \text{若}\forall i\in[1,n],\sigma(\alpha_i)=\tau(\alpha_i),\text{则}\sigma=\tau\end{gathered} \tag{13}$$

$$\begin{gathered}\text{设}B=\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\}\text{是}V_1\text{的基，}S=\{\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n\}\text{是}V_2\text{中任意}n\text{个向量，}\\ \text{则存在唯一的}\sigma\in L(V_1,V_2),\text{使得}\sigma(\alpha_i)=\beta_i,i=1,2,\ldots,n.\end{gathered} \tag{14}$$

这两条定理可以说明，对于固定的V中的一组基，每一组对应的W中的不同的像与一个线性映射是一一对应(等价)关系

经典题型：

$$\begin{gathered}\text{是否存在}R^2\text{到}R^3\text{的线性映射}\sigma,\\ \text{使得}\sigma(1,0)^T=(1,0,0)^T,\sigma(0,1)^T=(0,1,0)^T,\sigma(1,1)^T=(0,0,1)^T\text{？}\end{gathered} \tag{15}$$

该题型解答思路:

(1) 优先检查$\sigma(0)=0$, 此处$\sigma(0)=\sigma((1,0)^T+(0,1)^T-(1,1)^T)=(1,1,-1)$, 显然矛盾

(2) 线性相关的向量不能映射为线性无关的向量, 这里映射后的三个像是线性无关的,显然矛盾

(3) 不存在从低维数空间到高维数空间的满射, 这里映射后三个向量构成一组基, 显然是满射, 矛盾

(4) 如果不违背上三条结论, 尝试构造该映射

维数公式

对于一个出发空间是有限维线性空间的线性映射，维数公式描述了其出发空间，像空间与核空间的维数关系

$$\text{设}\sigma\in L(V_1,V_2),\text{则}\dim V_1=\dim im\sigma+\dim\ker\sigma \tag{16}$$

例题:

判断: 已知$\sigma\in L(V,V),\dim V=n$,则有$Im\sigma+\ker\sigma=V$

已知$\sigma\in L(V,V),\dim V=n,$ 且$\sigma^2=\sigma$

证明: (1) $im(I-\sigma)\subseteq\ker\sigma$ (2) $r(I-\sigma)+r(\sigma)=n$ (3)$V=\ker\sigma\oplus im\sigma$

注 : (2)是幂等变换的等价条件, 此处先证明必要性(即$\sigma^2=\sigma\Leftarrow r(I-\sigma)+r(\sigma)=n$)即可, 充分性在学习过秩不等式更容易证明

单射与满射的相关结论

设$\sigma\in L(V_1,V_2)$满射的判断是容易的，只需求出$im\sigma=V_2$即可，下面给出有关单射的结论：

(1)

$$\sigma\text{是单射}\Leftrightarrow\ker\sigma=\{0\} \tag{17}$$

(2)若$\dim V_1=\dim V_2$，由维数公式直接可以得到：

$$\sigma\text{是单射}\Leftrightarrow\sigma\text{是满射} \tag{18}$$

(3)不存在从低维数空间到高维数空间的满射

秩等式与不等式

秩的等式与不等式是较难的一部分，可选择性的学习，本部分只列出线性映射版本的可能用到的结论，矩阵版本及更多秩不等式可见LALU第9.8节

(1)

$$\begin{gathered}\text{设}f \in L(V_1,V_2), g,p\text{为可逆线性映射,}\\ \text{则有}r(f)=r(g\circ f)=r(f\circ p)=r(g\circ f\circ p)\end{gathered} \tag{19}$$

即复合一个可逆映射不改变线性映射的秩

(2)

$$r(\sigma+\tau)\leqslant r(\sigma)+r(\tau) \tag{20}$$

(3) 设$\sigma \in L(V_1,V_2), \tau \in L(V_2,V_3), n=\dim V_2$, 则有：

$$r(\sigma)+r(\tau)-n\leqslant r(\sigma\circ\tau)\leqslant min\{r(\sigma),r(\tau)\} \tag{21}$$

例题：设A是实数域上的$m\times n$阶矩阵，则矩阵秩$r(A^TA)=r(A)$。

同构

$$\begin{gathered}\text{如果由线性空间}V_1(F)\text{到}V_2(F)\text{存在一个线性双射}\sigma\text{，则称}V_1(F)\text{和}V_2(F)\text{是同构的，}\\ \text{记作}V_1(F)\cong V_2(F)\end{gathered} \tag{22}$$

对于同构映射σ可以得到：

$$r(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m)=r(\sigma(\alpha_1),\sigma(\alpha_2),\ldots,\sigma(\alpha_m)) \tag{23}$$

下面给出同构的等价条件:

$$V_1\cong V_2\Leftrightarrow \dim V_1=\dim V_2 \tag{24}$$

例题：

$$\text{证：}L(V,W)\cong F^{\dim W\times\dim V} \tag{25}$$

矩阵

矩阵定义

域F中的$m\times n$个元素$a_{ij}(i=1,\dots,m,j=1,\dots,n)$排成$m$行$n$列的矩形数表，称为域$F$上的一个$m\times n$矩阵

记作：

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{26}$$

设$\sigma\in L(V,W)$，我们可以先固定V中的一组基$\alpha_1,\dots\alpha_n$ 与W中的一组基$\beta_1,\dots,\beta_m$来研究该线性映射，由线性映射的确定，σ可由$\sigma(\alpha_1),\dots,\sigma(\alpha_n)$唯一确定，将这组像分解为基$\beta$上的和，即存在唯一一组$a_{1i},\dots,a_{mi}$,使得$\sigma(\alpha_j)=\Sigma_{i=1}^m a_{ij}\beta_i$，可以看出，在这两组固定的基下，一个线性映射与一组$a_{ij},i=1,\dots,n,j=1,\dots,m$是一一对应（等价）的关系，由此可以得到：

$$\text{在分别固定了出发空间和到达空间的一组基后，一个线性映射等价于一组}a_{ij} \tag{27}$$

将这组a_{ij}按一定规则排列成矩阵，就得到了σ在这两组基下对应的矩阵表示$M(\sigma)=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$

排列规则可采用如下记忆方式：

$$\begin{matrix} \sigma(\alpha_1) & \sigma(\alpha_2) & \dots & \sigma(\alpha_n) \\ || & || & & || \\ \begin{matrix} a_{11}\beta_1 \\ a_{21}\beta_2 \\ \vdots \\ a_{m1}\beta_m \end{matrix} & \begin{matrix} a_{12}\beta_1 \\ a_{22}\beta_2 \\ \vdots \\ a_{m2}\beta_m \end{matrix} & \begin{matrix} \cdots \\ \cdots \\ \ddots \\ \cdots \end{matrix} & \begin{matrix} a_{1n}\beta_1 \\ a_{2n}\beta_2 \\ \vdots \\ a_{mn}\beta_m \end{matrix} \end{matrix} \tag{28}$$

(因为本讲只是简单引入,因此只选择了基础题作为例题加深记忆,有挑战性的矩阵题目将安排在下一次辅学)

例题：已知$\sigma\in L(R_3,R_3)$且$\sigma(x_1,x_2,x_3)^T=(x_1+x_2,x_1-x_3,x_2)^T$,写出$\sigma$在自然基下的矩阵表示

历年期中题目选讲

(1)

$$\begin{gathered} \text{设}\dim V(f)=n,\ \alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n\text{是}V\text{的一组基,且}V_1=\operatorname{span}(\alpha_1+2\alpha_2+\cdots+n\alpha_n) \\ V_2=\left\{k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n \,\middle|\, k_1+\frac{k_2}{2}+\cdots+\frac{k_n}{n}=0\right\} \\ \text{证明：}1.V_2\text{是}V\text{的子空间} \\ 2.V=V_1\oplus V_2. \end{gathered} \tag{29}$$

(2)

$$\text{设}\tau\text{为}\mathbb{R}^n\text{上任一线性变换，}I\text{为}\mathbb{R}^n\text{上恒等变换}$$
$$\text{证明：}\ker\tau\subseteq\operatorname{im}(I-\tau)\text{。又问：}\operatorname{im}\tau\subseteq\ker(I-\tau)\text{是否一定成立？} \tag{30}$$

(4) **设$\mathbb{R}[x]_3$是次数小于等于 3 的实系数多项式的全体和零多项式一起组成的集合，关于多项式加法和数乘构成的实数域上的线性空间。**

1 证明：

$$W=\{f(x)\in\mathbb{R}[x]_3\mid f(1)=0\}\text{是}\mathbb{R}[x]_3\text{的子空间，并求}\dim W\text{和}W\text{的一组基。} \tag{31}$$

2 定义从$\mathbb{R}[x]_3$到$\mathbb{R}$的映射T如下：$\forall f(x)\in\mathbb{R}[x]_3$，令$T(f(x))=f(1)$。

证明：T是线性映射，并求$\dim\ker T$和$\operatorname{im}T$

3 设$f,g,h\in\mathbb{R}[x]_3$，且$f(1)=g(1)=h(1)=0$

证明：f,g,h线性相关

(5)

$$\text{证明替换定理：}$$
$$\text{设向量组}\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s\text{线性无关，且}\beta=b_1\alpha_1+b_2\alpha_2+\cdots+b_s\alpha_s\text{。} \tag{32}$$
$$\text{如果存在某个}b_i\neq0\text{，则}\beta\text{可替换}\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s\text{中的某个向量，成为一个新的线性无关向量组。}$$

(6)

$$\text{证明：如果向量组}\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m\}\text{的秩为}r$$
$$\text{那么该向量组中任意}s\text{个向量组成的子集的秩大于等于}r+s-m\text{。} \tag{33}$$

(7)

$$
\begin{gathered}
\text{域}\mathbf{F}\text{上所有}m\times n\text{矩阵组成的集合}M_{m\times n}(\mathbf{F})\text{是域}\mathbf{F}\text{上的线性空间}\\
\text{定义}V_i=\{Ae_{ii}\mid A\in M_{m\times n}(\mathbf{F})\},\quad (i=1,2,\ldots,n)\\
\text{其中}e_{ij}\text{是第}i\text{行第}j\text{列元素为}1\text{，其余元素均为0的}n\text{阶矩阵.}\\
\text{证明：}1.V_i\text{是}M_{m\times n}(\mathbf{F})\text{的子空间}\\
2.M_{m\times n}(\mathbf{F})=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_n\text{。}
\end{gathered}\tag{34}
$$

(8)判断正误并证明或举反例

$$
\begin{gathered}
1.\forall n\geq 2,\text{不存在非零实线性映射 }f:M_n(\mathbb{R})\to\mathbb{R}\text{ 使得 }f(AB)=f(A)f(B)\text{。}\\
2.\text{设}W_1,W_2\text{是线性空间}V\text{的两个子空间,则}W_1\cup W_2=W_1+W_2\Leftrightarrow W_1\subseteq W_2\text{或}W_2\subseteq W_1\text{。}\\
3.\text{设}\alpha,\beta\text{是欧式空间}V\text{中两个线性无关向量，且}\frac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}\quad\text{和}\quad\frac{2(\alpha,\beta)}{(\beta,\beta)}\text{都是不大于零的整数}\\
\text{则}\alpha\text{和}\beta\text{的夹角只可能是}\frac{\pi}{2},\quad\frac{2\pi}{3},\quad\frac{3\pi}{4},\quad\frac{5\pi}{6}.\\
4.n\text{是一个大于1的整数，定义}W=\{(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathbb{C}^n\mid x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=0\}\\
\text{证明：}W\text{是复线性空间}\mathbb{C}^n\text{的一个子空间。}\\
5.\text{正整数集}\mathbf{R}^+\text{对如下定义的加法和数乘法构成整数域}\mathbf{Z}\text{上的线性空间：}\\
a\oplus b=ab,\quad\lambda\circ a=a^\lambda,\quad\forall a,b\in\mathbf{R}^+,\lambda\in\mathbf{Z}.\\
6.\text{设}\sigma\in\mathcal{L}(V)\text{，}\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\}\text{是}V\text{的一组基,则}\sigma\text{可逆当且仅当}\\
\{\sigma(\alpha_1),\sigma(\alpha_2),\ldots,\sigma(\alpha_n)\}\text{是}V\text{的一组基。}\\
7.\text{对任意实数域}\mathbf{R}\text{上的线性空间}V\text{，都能找到有限个}V\text{的非平凡子空间}V_1,V_2,\ldots,V_m\text{，}\\
\text{使得}V=V_1\cup V_2\cup\cdots\cup V_m\text{。}\\
8.\text{与所有}n\text{阶矩阵可交换的矩阵一定是}n\text{阶数量矩阵。}\\
9.\text{设}A\text{是复数域上的}m\times n\text{阶矩阵，则矩阵秩}r(A^TA)=r(A)\text{。}\\
(\text{注：复数域上结论为}r(A^*A)=r(A))
\end{gathered}\tag{35}
$$