行列式与伴随矩阵知识点精讲

一、行列式的三种定义

1. 递归定义（按行/列展开）

设 $A = (a_{ij})$ 是一个 $n \times n$ 矩阵，其行列式可按第 i 行展开为：

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}$$

其中 M_{ij} 是去掉第 i 行和第 j 列后得到的 $(n-1) \times (n-1)$ 子矩阵的行列式，称为 **余子式**；而 $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ 称为 **代数余子式**。

> 注：也可按任意列展开，公式类似。

2. Leibniz 公式（排列定义）

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$$

- S_n：所有 n 阶排列的集合（共 $n!$ 个）；
- σ：一个排列；
- $\operatorname{sgn}(\sigma)$：排列的符号（偶排列为 $+1$，奇排列为 -1）。

> 此定义理论性强，但实际计算中极少直接使用。

3. 几何定义（有向体积）

若将 A 的列向量视为 $\mathbb{R}^n$ 中的向量 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$，则：

$$|\det(A)| = \text{以 } \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \text{ 为边的平行多面体的体积}$$

- $\det(A) > 0$：右手系；

- $\det(A) < 0$：左手系；
- $\det(A) = 0$：向量线性相关，体积为零。

二、行列式的基本性质

性质	描述
转置不变性	$\det(A^\top) = \det(A)$
行交换变号	交换两行（或两列），行列式变号
数乘某行	某一行乘以常数 k，则 $\det$ 也乘以 k
线性性	对某一行（列）是线性的： $\det(\ldots, \alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}, \ldots) = \alpha \det(\ldots, \mathbf{u}, \ldots) + \beta \det(\ldots, \mathbf{v}, \ldots)$
两行相同 ⇒ 0	若有两行（列）完全相同，则 $\det(A) = 0$
两行成比例 ⇒ 0	若两行（列）线性相关，则 $\det(A) = 0$
三角矩阵	上（下）三角矩阵的行列式等于对角线元素之积： $\det(A) = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$
乘法公式	$\det(AB) = \det(A) \det(B)$

三、行列式计算技巧

1. 化为三角形（上/下三角）

通过初等行变换（**仅用“倍加”操作**，即某行加另一行的倍数），将矩阵化为上三角形式，再取对角线乘积。

> 注意：**交换行会变号**，**某行乘 k 会使行列式乘 k**，需记录调整因子。

2. 按零多的行/列展开

优先选择含零最多的行或列进行 Laplace 展开，减少计算量。

3. 分块矩阵公式（特殊情形）

- 若 A, D 为方阵，且 $B = 0$ 或 $C = 0$，则：

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = \det(A)\det(D)$$

- 更一般地，若 A 可逆，则：

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(A) \cdot \det(D - CA^{-1}B)$$

4. 特殊行列式

范德蒙德行列式（Vandermonde）

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i)$$

四、伴随矩阵（Adjugate Matrix）

1. 定义

设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$，其 **伴随矩阵** 记为 $\mathrm{adj}(A)$（也记作 A^*），定义为：

$$\mathrm{adj}(A) = (A_{ji})_{n \times n}$$

即：(i, j) 位置是 a_{ji} 的代数余子式（注意是 **转置** 后的位置）。

> 换言之，$\mathrm{adj}(A) = [\text{代数余子式矩阵}]^\top$

2. 核心性质

- **基本恒等式**:

$$A \cdot \operatorname{adj}(A) = \operatorname{adj}(A) \cdot A = \det(A) \cdot I_n$$

- **可逆性判定**:
  - 若 $\det(A) \neq 0$，则 A 可逆，且:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A)$$

  - 若 $\det(A) = 0$，则 $A \cdot \operatorname{adj}(A) = 0$（零矩阵）
- **秩的关系**（重要！）:

$$\operatorname{rank}(\operatorname{adj}(A)) = \begin{cases} n, & \text{若 } \operatorname{rank}(A) = n \\ 1, & \text{若 } \operatorname{rank}(A) = n-1 \\ 0, & \text{若 } \operatorname{rank}(A) < n-1 \end{cases}$$

3. 经典例题

例1：求 2×2 矩阵的伴随矩阵

设 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，则:

- 代数余子式:
  - $A_{11} = d, A_{12} = -c$
  - $A_{21} = -b, A_{22} = a$
- 伴随矩阵（转置后）:

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

验证：$A \cdot \operatorname{adj}(A) = (ad - bc)I_2 = \det(A)I_2$

例2：已知 $\det(A) = 0$ 且 $\operatorname{rank}(A) = n-1$，证明 $\operatorname{adj}(A) \neq 0$

解：由秩的性质，此时 $\operatorname{rank}(\operatorname{adj}(A)) = 1$，故非零。

> 应用：齐次方程 $A\mathbf{x} = 0$ 的非零解可由 $\operatorname{adj}(A)$ 的任一非零列给出。

五、矩阵的秩与行列式的关系

1. 秩的定义回顾

矩阵 A 的 **秩**（rank）是其行（或列）向量组的最大线性无关组所含向量个数，等价于：

> **最大非零子式的阶数**

即：若存在一个 r 阶子式 $\neq 0$，而所有 $r+1$ 阶子式均为 0，则 $\operatorname{rank}(A) = r$。

2. 与行列式的核心联系

- 对 $n \times n$ 方阵 A：

$$\operatorname{rank}(A) = n \iff \det(A) \neq 0$$

  此时称 A **满秩**、**非奇异**、**可逆**。
- 若 $\operatorname{rank}(A) < n$，则 $\det(A) = 0$，称 A **奇异**。

3. 秩的判定方法（结合行列式）

- **步骤**：
  i. 从高阶到低阶检查子式；
  ii. 找到最大的 r 使得存在一个 r 阶子式 $\neq 0$；
  iii. 则 $\operatorname{rank}(A) = r$。

> 实际中更常用 **初等行变换化为行阶梯形** 来求秩，效率更高。

六、总结图示

概念	关键公式/结论
行列式定义	递归、Leibniz、几何体积
行列式性质	线性、反对称、乘法性、三角积
计算技巧	化三角、Laplace 展开、分块、范德蒙德
伴随矩阵	$\operatorname{adj}(A) = (A_{ji})$，满足 $A\operatorname{adj}(A) = \det(A)I$
秩与行列式	$\det(A) \neq 0 \iff \operatorname{rank}(A) = n$
伴随矩阵的秩	依 A 的秩为 $n, n-1, < n-1$ 而分别为 $n, 1, 0$

行列式习题集

1. 证明题
   求证以下命题：
   (1) 奇数阶反对称矩阵不可逆；
   (2) 若 A 是 n 阶可逆对称矩阵，B 是 n 阶反对称矩阵，则当 n 为奇数时，齐次线性方程组 $(AB)X = O$ 有非零解。
2. 伴随矩阵性质
   证明：
   (1) 若 A 为幂等矩阵（$A^2 = A$），则 A^* 也为幂等矩阵；若 A 为幂零矩阵（存在正整数 k 使得 $A^k = 0$），则 A^* 也为幂零矩阵。
   (2) 若 A 为对称矩阵（$A^\top = A$），则 A^* 也为对称矩阵；若 A 为反对称矩阵（$A^\top = -A$），则当 n 为偶数时，A^* 是反对称矩阵；
   当 n 为奇数时，A^* 是对称矩阵。
3. 三角矩阵的伴随矩阵
   证明：上（下）三角矩阵的伴随矩阵仍是上（下）三角矩阵。（对角矩阵为其特例。）
4. 代数余子式比例性
   设 A 为 n 阶方阵，证明：若 $A = 0$，则 A 中任意两行（或两列）对应元素的代数余子式成比例。
5. 向量组的线性相关性
   设向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关，讨论向量组

$$\beta_1 = \alpha_1 - \alpha_2 - 2\alpha_3, \quad \beta_2 = 2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3, \quad \beta_3 = 3\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3$$

的线性相关性。

6. 扩充为基

设 $W = \mathrm{span}(\alpha_1, \alpha_2) \subset \mathbb{R}^4$，其中

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

试将 $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ 扩充为 $\mathbb{R}^4$ 的一组基。

7. 滚动型行列式

计算：

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ x & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ x & x & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x & x & x & \cdots & 1 & 2 \\ x & x & x & \cdots & x & 1 \end{vmatrix}.$$

提示：考虑滚动消去法（逐行相减）。

8. 循环双对角行列式

计算：

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & & & \\ a_2 & b_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & b_{n-1} & \\ b_n & & & & a_n \end{vmatrix}.$$

9. 三对角型行列式

计算：

$$D_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & & & \\ 1 & a+b & ab & & \\ & 1 & a+b & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & ab \\ & & & 1 & a+b \end{vmatrix}.$$

10. 平方差型行列式

计算：

$$
\begin{vmatrix}
a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\
b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\
c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\
d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2
\end{vmatrix}.
$$

11. “1 加对角”行列式

设

$$
D=\begin{vmatrix}
1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\
1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
1 & 1 & \cdots & 1+a_n
\end{vmatrix}.
$$

(1) 用递推公式计算 D；

(2) 将 D 硬拆为 2^n 个行列式之和，并计算结果。

12. 特殊结构行列式

(1) 计算：

$$
D=\begin{vmatrix}
1 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\
2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
2 & 2 & \cdots & n-1 & 2 \\
2 & 2 & \cdots & 2 & n
\end{vmatrix}.
$$

(2) 计算（循环移位矩阵）：

$$
D=\begin{vmatrix}
1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\
2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \\
3 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1
\end{vmatrix}.
$$

13. 稀疏结构行列式

计算：

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & x \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & x^2 \\ 0 & 5 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & x^3 \end{vmatrix}.$$

线性方程组解的一般理论

考虑一般形式的线性方程组：

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

其中 $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$，$\mathbf{x} \in \mathbb{F}^n$，$\mathbf{b} \in \mathbb{F}^m$，通常 $\mathbb{F}$ 为实数域 $\mathbb{R}$ 或复数域 $\mathbb{C}$。

1. 解的存在性：相容性判定

定理（相容性准则）
线性方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 有解（即相容）当且仅当

$$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}([A \mid \mathbf{b}]).$$

- **几何解释**：$\mathbf{b}$ 必须落在 A 的列空间 $\operatorname{Col}(A)$ 中。
- **等价说法**：向量 $\mathbf{b}$ 可由 A 的列向量线性表出。

2. 解的唯一性

推论
若 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 相容，则：

- 当 $\operatorname{rank}(A) = n$（即列满秩）时，有**唯一解**；
- 当 $\operatorname{rank}(A) < n$ 时，有**无穷多解**。

> **注意**：唯一解存在的前提是方程组有解，且未知数个数等于有效方程个数。

3. 齐次线性方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$

- 总有解（零解）；
- 解集构成 $\mathbb{F}^n$ 的一个子空间，称为 **零空间（Null Space）**，记作 $\mathrm{Null}(A)$；
- **维数公式（秩–零度定理）**：

$$\dim(\mathrm{Null}(A)) = n - \mathrm{rank}(A).$$

- 若 $\mathrm{rank}(A) = r < n$，则存在 $n - r$ 个线性无关的解向量 $\{\boldsymbol{\xi}_1, \ldots, \boldsymbol{\xi}_{n-r}\}$，使得任意解可表示为：

$$\mathbf{x} = c_1\boldsymbol{\xi}_1 + \cdots + c_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r}, \quad c_i \in \mathbb{F}.$$

  这组基称为 **基础解系**。

4. 非齐次线性方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$（$\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$）

- 若有解，设 $\mathbf{x}_p$ 是一个**特解**，则通解为：

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_p + \mathbf{x}_h, \quad \text{其中 } \mathbf{x}_h \in \mathrm{Null}(A).$$

- 即：**通解 = 特解 + 齐次通解**。
- 解集不是子空间（不含零向量），而是 $\mathrm{Null}(A)$ 的一个**仿射平移**。

理论应用

1. 向量线性表示问题

问题：给定向量 $\mathbf{b}$ 和向量组 $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\}$，判断 $\mathbf{b}$ 能否由它们线性表示？
方法：构造矩阵 $A = [\mathbf{a}_1 \ \cdots \ \mathbf{a}_n]$，解 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$。

$\to$ 有解 $\iff \operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}([A \mid \mathbf{b}])$。

2. 子空间交与公共解

问题：两个齐次方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 与 $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的公共解？
方法：联立得

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0},$$

其解空间即为 $\operatorname{Null}(A) \cap \operatorname{Null}(B)$。

3. 最小二乘法的预备知识（拓展）

当 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 无解（超定系统），可转而求最小化 $\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2$ 的近似解，导出 **正规方程**：

$$A^\top A\mathbf{x} = A^\top \mathbf{b}.$$

- 该方程恒有解；
- 当 A 列满秩时，$A^\top A$ 可逆 $\Rightarrow$ 有唯一解。

小结

概念	结论
有解条件	$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}([A \mid \mathbf{b}])$
唯一解条件	有解 且 $\operatorname{rank}(A) = n$
齐次解结构	$(n - \operatorname{rank}(A))$ 维子空间，基础解系含 $n - r$ 个向量
非齐次通解	特解 + 齐次通解
应用核心思想	将实际问题转化为 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$，利用秩与解空间分析

习题

1. 证明以下关于线性方程组解的理论的基本定理：

(1) 设矩阵 $A \in M_{m\times n}(F)$，若 $r(A) = r$，则齐次线性方程组 $AX = 0$ 的解空间 $N(A)$ 是 F^n 的一个 $n - r$ 维子空间。

(2) 设 A 为 $m \times n$ 矩阵，则
  i. 齐次线性方程组 $AX = 0$ 只有零解等价于 $r(A) = n$;
  ii. 齐次线性方程组 $AX = 0$ 有非零解（无穷解）等价于 $r(A) < n$。

(3) 设 A 为 n 阶矩阵，则
  i. 齐次线性方程组 $AX = 0$ 只有零解等价于 $|A| \neq 0$;
  ii. 齐次线性方程组 $AX = 0$ 有非零解（无穷解）等价于 $|A| = 0$。

(4) 对于非齐次线性方程组 $AX = b$，下列命题等价：
  i. $AX = b$ 有解；
  ii. $b \in R(A)$，即 b 可被 A 的列向量组线性表示；
  iii. $r(A, b) = r(A)$，即增广矩阵的秩等于系数矩阵的秩。

(5) 设 $X_1, X_2, \ldots, X_s$ 为齐次线性方程组 $AX = 0$ 的一组解，则

$$k_1X_1 + k_2X_2 + \cdots + k_sX_s$$

也为齐次线性方程组 $AX = 0$ 的解，其中 $k_1, k_2, \ldots, k_s$ 为任意常数。

(6) 设 η_0 为非齐次线性方程组 $AX = b$ 的一个解，$X_1, X_2, \ldots, X_s$ 为齐次线性方程组 $AX = 0$ 的一组解，则

$$k_1X_1 + k_2X_2 + \cdots + k_sX_s + \eta_0$$

也为非齐次线性方程组 $AX = b$ 的解.

(7) 设 η_1, η_2 为非齐次线性方程组 $AX = b$ 的两个解，则 $\eta_2 - \eta_1$ 为齐次线性方程组 $AX = 0$ 的解.

(8) 设 $X_1, X_2, \ldots, X_s$ 为非齐次线性方程组 $AX = b$ 的一组解，则

$$k_1X_1 + k_2X_2 + \cdots + k_sX_s$$

也为非齐次线性方程组 $AX = b$ 的解的充分必要条件是

$$k_1+k_2+\cdots+k_s=1.$$

(9) 设 $X_1,X_2,\ldots,X_s$ 为非齐次线性方程组 $AX=b$ 的一组解，则

$$k_1X_1+k_2X_2+\cdots+k_sX_s$$

为齐次线性方程组 $AX=0$ 的解的充分必要条件是

$$k_1+k_2+\cdots+k_s=0.$$

第四组（一些经典的判断题）

判断以下说法是否正确并说明理由：

(10) 方程组 $AX=b$ 有唯一解等价于方程组 $AX=0$ 只有零解.

(11) 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，B 是 $n\times s$ 矩阵，若 $AB=O$，则 B 的列向量为方程组 $AX=0$ 的解.

(12) 设 A 是 n 阶非零矩阵，则存在非零矩阵 B，使得 $AB=O$ 等价于 $r(A)<n$.

(13) 方程组 $AX=0$ 的解为 $BX=0$ 的解，则 $r(A)\leq r(B)$.

(14) 方程组 $AX=0$ 与 $BX=0$ 为同解方程组等价于 $r(A)=r(B)$.

1. 设 A 为四阶矩阵，$r(A)<4$，且 $A_{21}\neq 0$，求方程组 $AX=0$ 的通解.
2. 设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 为四阶矩阵，方程组 $AX=0$ 的通解为

$$X=k\begin{bmatrix}1\\0\\-4\\0\end{bmatrix},$$

   求 $A^*X=0$ 的基础解系.
3. 设 A 为 n 阶实矩阵，

$$W=\left\{\beta\in\mathbb{R}^n\mid\alpha^\top A\beta=0,\ \forall\alpha\in\mathbb{R}^n\right\},$$

   证明：
   (1) $\dim W+r(A)=n$;
   (2) W 为 $\mathbb{R}^n$ 的子空间.
4. 已知 4 阶方阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 的列向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 线性无关，且

$$\alpha_1 = 2\alpha_2 - \alpha_3,$$

若

$$\beta = \alpha_1 - \alpha_2 + 3\alpha_4,$$

求方程组 $AX = \beta$ 的通解.

5. 设四元非齐次线性方程组的系数矩阵的秩为 3，已知 η_1, η_2, η_3 是它的三个解向量，且

$$\eta_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \eta_2 + \eta_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix},$$

求该方程组的通解.

6. 设 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 是 n 元非齐次线性方程组 $AX = b$ 的三个线性无关的解，且 $r(A) = n - 2$，求：
   (1) 导出组 $AX = 0$ 的一个基础解系；
   (2) $AX = 2b$ 的一般解.
7. 已知 A 是一个 $s \times n$ 矩阵，证明：线性方程组 $AX = b$ 对任意列向量 $b \in F^s$ 都有解的充要条件是 A 行满秩（即 $r(A) = s$）.
8. 设 A, B 分别是 $m \times n$ 和 $n \times s$ 矩阵，且 $r(B) = n$，证明：若 $AB = O$，则 $A = O$.
9. 设 $A \in F^{m \times n}, B \in F^{p \times n}$（其中 $m < n$），V_1, V_2 分别为齐次线性方程组 $AX = 0$ 和 $BX = 0$ 的解空间，证明：

$$F^n = V_1 \oplus V_2$$

的充要条件是

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} X = 0$$

只有零解.