线代 II(H) 期中复习

第一次辅学

作者：强数 2401-应凯诚

组织：数学科学学院

时间：2026.4.19

目录

第 1 章 商空间与对偶空间

1.1 商空间

定义 1.1 (仿射子集)
设 $v \in V$，U 是 V 的子空间，则 V 的仿射子集是 V 的形如 $v+U$ 的子集，其中 $v+U$ 定义为 $v+U=\{v+u \mid u \in U\}$。♣

定义 1.2 (商空间)
设 U 是 V 的子空间，则商空间 V/U 是指所有由诱导的等价类构成的集合，即 V 的所有平行于 U 的仿射子集的集合。商空间是线性空间，即 $V/U=\{v+U \mid v \in V\}$。♣

定理 1.1
设 U 是 V 的子空间，$v, w \in V$，则以下陈述等价：
- $v-w \in U$；
- $v+U=w+U$；
- $(v+U) \cap (w+U) \neq \emptyset$。

设 U 是有限维线性空间 V 的子空间，则 $\dim V/U=\dim V-\dim U$。♡

1.2 向量空间的积

定义 1.3
向量空间的积定义为：$V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n=\{(v_1, \cdots, v_n): v_i \in V_i\}$。其加法为对应分量相加，数乘为对应分量分别数乘。♣

定理 1.2
积空间的维数是各维数的和，即 $\dim(V_1 \times \cdots \times V_n)=\dim(V_1)+\cdots+\dim(V_n)$。线性空间的和是直和，当且仅当映射 $\phi(u_1, \cdots, u_n)=\sum_{i=1}^n u_i$ 是单射。♡

1.3 对偶空间

1.3.1 对偶空间与对偶基

定义 1.4 (对偶空间)
称 $\mathcal{L}(V, \mathbb{R})$ 上的元素为 V 上的一个线性泛函。$\mathcal{L}(V, \mathbb{R})$ 被称为 V 的对偶空间，记作 V^*。♣

定理 1.3
有限维线性空间与其对偶空间同构，即 $V \cong V^*$。对于 V 的一组基 $e_1, e_2, \ldots, e_n$，可以构造满足 $f_i(e_j)=\delta_{ij}$ 的一组泛函，这组泛函构成了 V^* 的一组基，被称为原空间基的对偶基。♡

1.3.2 对偶映射与双对偶空间

定义 1.5 (对偶映射)

给定线性映射 $f: V \to W$，定义其对偶映射 $f^*: W^* \to V^*$ 为 $f^*(\varphi) = \varphi \circ f$。

定理 1.4

对偶映射满足以下性质：

- 对偶映射也是线性映射。
- 复合映射的对偶满足：$(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$。
- 线性运算的对偶满足：$(f+g)^* = f^* + g^*$ 以及 $(\lambda f)^* = \lambda f^*$。

定理 1.5 (自然同构)

存在一个从 V 到其双对偶空间 V^{**} 的自然同构。其同构映射 $\psi: V \to V^{**}$ 的自然定义为 $(\psi(v))(f) = f(v)$，且该定义不依赖于基的选择。

1.3.3 零化子

定义 1.6 (零化子)

设 U 为 V 的子空间，则称 $U^0 = \{\varphi \in V^* : \forall u \in U, \varphi(u) = 0\}$ 为 U 的零化子。同理，对于 V^* 的子空间 U，可以定义其在 V 中的公共零点集为 $Z(U) = \{v \in V : \forall \varphi \in U, \varphi(v) = 0\}$。

定理 1.6

关于零化子有如下重要结论：

- 零化子 U^0 构成对偶空间 V^* 的一个子空间。
- 若 $V = U_1 \oplus U_2$，则有 $V^* = U_1^0 \oplus U_2^0$，且 $U_1^0 = U_2^*$，$U_2^0 = U_1^*$。
- 零化子的维数满足：$\dim U^0 = \dim V - \dim U$。
- 对于有限维空间，两次取零化子后有 $U^{00} = U$。
- 零点集与零化子满足关系：$U = Z(U)^0$（对于 V^* 的子空间）以及 $U = Z(U^0)$（对于 V 的子空间）。

1.3.4 对偶映射的零空间与像空间

定理 1.7

设 V 和 W 都是有限维线性空间，$\sigma \in \mathcal{L}(V, W)$，则有：

- $\ker \sigma^* = (\operatorname{im} \sigma)^0$。
- $\dim \ker \sigma^* = \dim \ker \sigma + \dim W - \dim V$。
- $\dim \operatorname{im} \sigma^* = \dim \operatorname{im} \sigma$。
- $\operatorname{im} \sigma^* = (\ker \sigma)^0$。
- σ 是单射当且仅当 σ^* 是满射。
- σ 是满射当且仅当 σ^* 是单射。

第 1 章 练习

1. 设 $V = \mathbf{R}[x]_4$ (次数不超过 4 的实系数多项式全体), $T \in \mathcal{L}(V)$, T' 是 T 的对偶映射。已知 $\ker T' = \operatorname{span}(\phi)$, $\phi \in V'$, $\phi(p) = p(18)$, $\forall p \in V$。求 $\operatorname{im} T$。
2. 设 V 是有限维的，$\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$ 是 V' 的基。证明：存在 V 的基使得其对偶基为 $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$。
3. 设 $\nu_1, \ldots, \nu_n$ 为有限维线性空间 V 中的一组基，$\phi_1, \ldots, \phi_n$ 为其对偶基。对 $\forall \psi \in V'$，证明：
$$\psi = \psi(\nu_1)\phi_1 + \cdots + \psi(\nu_n)\phi_n.$$
4. 设 U 是 V 的子空间使得 $\dim V/U = 1$。证明：存在 $\phi \in \mathcal{L}(V, F)$ 使得 $\operatorname{null} \phi = U$。
5. 设 $\phi \in V'$，设 $u \in V$ 不属于 $\operatorname{null} \phi$。证明：$V = \operatorname{null} \phi \oplus \{au : a \in \mathbb{F}\}$。
6. V 为有限维线性空间，T 是 V 到 V 的线性映射。若 $T^2 - 3T + 2I = 0$，证明：
$$V = \operatorname{null}(T - I) \oplus \operatorname{range}(T - I).$$

第 2 章 多项式

2.1 多项式的定义与基本运算

定义 2.1 (一般域上的一元多项式)

设 F 是域，称 F 上的一元多项式 $p(x)$ 是一个形如 $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m$ 的表达式，其中 $a_0, \ldots, a_m \in F$，$x \notin F$ 为不定元符号。使得 $a_k \neq 0$ 成立的最大整数 k 称为多项式的次数，记为 $\deg p = k$。零多项式的次数规定为 $-\infty$。♣

定理 2.1 (多项式次数的性质)

设 $p(x), q(x) \in F[x]$，则有：

- $\deg(p+q) \leq \max\{\deg p, \deg q\}$；
- $\deg(kp) = \deg p$ （其中 $k \in F$ 且 $k \neq 0$）；
- $\deg(pq) = \deg p + \deg q$。

♡

2.2 整除与互素

定义 2.2 (整除与相伴)

若存在多项式 $s(x) \in F[x]$ 使得 $p(x) = s(x)q(x)$，则称 $q(x)$ 整除 $p(x)$，记为 $q(x)|p(x)$。若 $p(x)|q(x)$ 且 $q(x)|p(x)$，则称 $p(x)$ 与 $q(x)$ 相伴，记为 $p(x) \sim q(x)$。两个多项式相伴当且仅当它们相差一个非零常数倍。♣

定理 2.2 (带余除法)

设 $p(x), s(x) \in F[x]$ 且 $s(x) \neq 0$，则存在唯一的多项式 $q(x), r(x) \in F[x]$，使得 $p(x) = s(x)q(x) + r(x)$，且 $\deg r < \deg s$。♡

定理 2.3 (欧几里得算法与最大公因式)

设 $p(x), q(x) \in F[x]$，则它们的最大公因式 $d(x)$ 必存在，且存在 $u(x), v(x) \in F[x]$ 使得 $d(x) = u(x)p(x) + v(x)q(x)$。♡

定义 2.3 (互素)

若 $p(x)$ 和 $q(x)$ 的最大公因式为 1，即 $(p(x), q(x)) = 1$，则称 $p(x)$ 和 $q(x)$ 互素。♣

定理 2.4 (裴蜀定理)

设 $p(x), q(x) \in F[x]$，则 $p(x)$ 和 $q(x)$ 互素的充要条件是存在 $u(x), v(x) \in F[x]$ 使得 $u(x)p(x) + v(x)q(x) = 1$。♡

定理 2.5 (最小公倍式)

设非零多项式 $p(x), q(x) \in F[x]$，其最大公因式为 $(p(x), q(x))$，最小公倍式为 $[p(x), q(x)]$，则有 $p(x)q(x) = (p(x), q(x))[p(x), q(x)]$。♡

定理 2.6 (中国剩余定理)

设 $q_1(x), q_2(x), \ldots, q_n(x) \in F[x]$ 两两互素，则对任意的 $r_1(x), r_2(x), \ldots, r_n(x) \in F[x]$，线性同余方程组 $p(x) \equiv r_k(x) \pmod{q_k(x)}\ (k = 1, 2, \ldots, n)$ 在模 $\prod_{i=1}^{n} q_i(x)$ 下有唯一解。

2.3 多项式的因式分解

定义 2.4 (可约与不可约)

设 $p(x) \in F[x]$ 是非常数多项式，若 $p(x)$ 可以分解为两个次数严格小于 $p(x)$ 次数的多项式的乘积，则称其为可约多项式，否则称为不可约多项式。

定理 2.7 (唯一分解定理)

设 $p(x) \in F[x]$ 是非常数多项式，则 $p(x)$ 可以分解为不可约多项式的乘积。且在不计不可约多项式次序以及相伴的意义下，该分解是唯一的。

定理 2.8 (重因式判定)

多项式 $p(x)$ 的形式导数记为 $p'(x)$。$p(x)$ 没有重因式的充要条件为它与其形式导数互素，即 $(p(x), p'(x)) = 1$。若设 $d(x) = (p(x), p'(x))$，则 $p(x)/d(x)$ 没有重因式，且其不可约因式与 $p(x)$ 的不可约因式完全相同（不计重数）。

2.4 复数域上的多项式

定理 2.9 (余数定理与根的个数)

$\lambda \in F$ 是 $p(x)$ 的根（即 $p(\lambda) = 0$）当且仅当 $(x - \lambda) | p(x)$。m 次多项式在域 F 上最多有 m 个互不相等的零点。

定理 2.10 (代数学基本定理)

非常数复多项式在复平面上必有零点。其推论为：复数域上的 n 次多项式有且仅有 n 个复根（含重数）；复数域上的不可约多项式只能是一次多项式。

定理 2.11 (韦达定理)

设 $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$，其 n 个复根为 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$，则根与系数满足关系：$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$，…，$\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$。

2.5 实数域与有理数域上的多项式

定理 2.12 (实系数多项式的因式分解)

实系数多项式的复根必然成对出现（即若 λ 是根，则 $\overline{\lambda}$ 也是根）。实数域上的不可约多项式只能是一次多项式，或者是判别式 $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ 的二次多项式 $ax^2 + bx + c$。

定理 2.13 (有理根判定定理)

设 $p(x)=a_nx^n+\cdots+a_0\in\mathbb{Z}[x]$，若存在既约分数 $\frac{q}{p}$（即 $(p,q)=1$）是 $p(x)$ 的有理根，则必有 $p|a_n$ 且 $q|a_0$。

定理 2.14 (高斯引理与有理数域可约性)

系数最大公因数为 1 的整系数多项式称为本原多项式。高斯引理指出：两个本原多项式的乘积仍是本原多项式。整系数多项式在有理数域上可约，当且仅当它在整数环上可约（即必能分解为两个次数较低的整系数多项式之积）。

定理 2.15 (艾森斯坦判别法)

设整系数多项式 $p(x)=a_nx^n+\cdots+a_0\ (a_n\neq 0, n\geq 1)$，若存在一个素数 p，满足：

- $p|a_0, p|a_1, \ldots, p|a_{n-1}$；
- $p\nmid a_n$；
- $p^2\nmid a_0$；

则 $p(x)$ 在有理数域上不可约。

第 2 章 练习

1. 设 $g(x)=ax+b$，$a,b\in\mathbf{F}$，$a\neq 0$，$f(x)\in\mathbf{F}[x]$，证明：$g(x)$ 是 $f^2(x)$ 的因式的充要条件是 $g(x)$ 是 $f(x)$ 的因式。
2. 设 $p,q\in\mathcal{P}(\mathbb{C})$ 为两个无公共零点的非常多项式，记 $m=\deg p, n=\deg q$。证明：$\exists r\in\mathcal{P}_{n-1}(\mathbb{C}), s\in\mathcal{P}_{m-1}(\mathbb{C})$，使得 $rp+sq=1$。
3. 设 $p\in\mathcal{P}(\mathbb{C}), p\neq 0$。令 $U=\{pq: q\in\mathcal{P}(\mathbb{C})\}$。(1) 证明 $\dim\mathcal{P}(\mathbb{C})/U=\deg p$。(2) 求 $\mathcal{P}(\mathbb{C})/U$ 的一个基。

第 3 章 特征理论

3.1 不变子空间与本征值

定义 3.1

如果子空间 U 满足 $\forall \alpha \in U, \sigma(\alpha) \in U$，则称 U 是 σ 的不变子空间。如果存在纯量 λ 和非零向量 ξ 使得 $\sigma(\xi) = \lambda\xi$，则称 λ 为本征值。特征多项式定义为 $f(\lambda) = |\lambda E - A|$。

定理 3.1

有限维复线性空间上的算子必有特征值。不同特征值对应的特征向量线性无关。算子可对角化当且仅当空间存在由本征向量构成的基，或空间是各特征子空间的直和。

3.2 广义特征向量与广义线性空间

3.2.1 核空间的性质

对于线性变换 $\sigma \in \mathcal{L}(V)$，其幂次的核空间具有以下重要性质：

- **单调性**：$\{0\} = \ker \sigma^0 \subset \ker \sigma^1 \subset \ker \sigma^2 \subset \cdots \subset \ker \sigma^k \subset \cdots$
- **稳定性**：若存在非负整数 m 使得 $\ker \sigma^m = \ker \sigma^{m+1}$，则对于所有 $k > m$，均有 $\ker \sigma^k = \ker \sigma^m$。
- **有限维观测**：设 $n = \dim V$，则核空间的增长在 n 次幂时必然稳定，即 $\ker \sigma^n = \ker \sigma^{n+1} = \cdots$。
- **结构分解**：空间 V 可以分解为核空间与像空间的直和：$V = \ker \sigma^n \oplus \operatorname{im} \sigma^n$。

3.2.2 广义特征空间

定义 3.2 (广义特征向量)

设 λ 是 $\sigma \in \mathcal{L}(V)$ 的特征值。若对于非零向量 v，存在正整数 j 使得 $(\sigma - \lambda I)^j v = 0$，则称 v 是对应于 λ 的广义特征向量。

定义 3.3 (广义特征空间)

对应于特征值 λ 的全体广义特征向量与零向量构成的集合称为广义特征空间，记为 $G(\lambda, \sigma)$。

定理 3.2 (广义特征空间的性质)

设 $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ 为 σ 的所有互异特征值，$n = \dim V$：

- 算子 $(\sigma - \lambda_j I)$ 在 $G(\lambda_j, \sigma)$ 上的限制是幂零的。
- $G(\lambda_j, \sigma)$ 是 σ 的不变子空间。
- 不同特征值对应的广义特征向量线性无关。
- 广义特征空间分解：$V = G(\lambda_1, \sigma) \oplus \cdots \oplus G(\lambda_m, \sigma)$。

3.3 多项式理论的应用

3.3.1 特征多项式与 Hamilton-Cayley 定理

定理 3.3 (Hamilton-Cayley 定理)

设 V 是复向量空间，$q(x)$ 是算子 σ 的特征多项式，则 $q(\sigma)=0$。即算子 σ 是其特征多项式的根。

- **维数与重数**：特征值 λ_i 对应的广义特征空间 $G(\lambda_i,\sigma)$ 的维数等于 λ_i 的代数重数。
- **分块性质**：若 $V=V_1\oplus\cdots\oplus V_m$ 且每个 V_j 在 σ 下不变，则 σ 的特征多项式是各限制算子特征多项式的乘积。

3.3.2 极小多项式

定义 3.4 (极小多项式)

算子 σ 的极小多项式是唯一满足 $p(\sigma)=0$ 的次数最小的首一多项式。

定理 3.4 (极小多项式的性质)

- 任何零化多项式（满足 $q(\sigma)=0$ 的多项式）都是极小多项式的倍式。
- 特征多项式是极小多项式的倍式。
- 极小多项式的零点集合与特征多项式的零点集合（即特征值集合）完全相同。
- 直和分解下的极小多项式：若 $V=\bigoplus U_i$ 且 U_i 为不变子空间，则 σ 的极小多项式是各限制算子极小多项式的最小公倍式（lcm）。

3.4 若当标准型 (Jordan Normal Form)

若当标准型是线性变换在复数域下最简化的矩阵表示。其核心结论如下：

- **存在性**：对于复向量空间上的任何算子 σ，都存在一组基使得 σ 在该基下的矩阵为若当标准型。
- **结构**：若当标准型由若干个若当块 (Jordan Blocks) $J_k(\lambda)$ 沿对角线排列而成。
- **块的性质**：对应特征值 λ 的若当块的最大阶数等于极小多项式中因子 $(x-\lambda)$ 的幂次。

第 3 章 练习

1. 设 U 是 V 的子空间使得 $\dim V/U = 1$。证明：存在 $\phi \in \mathcal{L}(V, F)$ 使得 $\operatorname{null}\phi = U$。
2. 设 $\phi \in V'$，设 $u \in V$ 不属于 $\operatorname{null}\phi$。证明：$V = \operatorname{null}\phi \oplus \{au : a \in \mathbb{F}\}$。
3. V 为有限维线性空间，T 是 V 到 V 的线性映射。若 $T^2 - 3T + 2I = 0$，证明：
$$V = \operatorname{null}(T - I) \oplus \operatorname{range}(T - I).$$
4. W_1, W_2 为有限维内积空间的子空间。证明：
$$(W_1 + W_2)^{\perp} = W_1^{\perp} \cap W_2^{\perp}, \qquad (W_1 \cap W_2)^{\perp} = W_1^{\perp} + W_2^{\perp}.$$
5. 设 V 为 n 维复向量空间，$T \in L(V)$，T 在 V 的一组基 $e_1, \ldots, e_n$ 下的矩阵为对角矩阵 $\operatorname{diag}\{d_1, \ldots, d_n\}$，且 $d_i \neq d_j\ (i \neq j)$。(1) 求 T 的所有一维不变子空间；(2) 求 T 的所有不变子空间。
6. 设 V 为 n 维复向量空间，$S, T \in L(V)$，$ST = TS$，则 (1) S, T 至少有一个公共的特征向量；(2) 存在 V 的一组基，使得 S 和 T 在此基下的矩阵均为上三角矩阵。
7. 设 $V = \mathbf{R}[x]_4$（次数不超过 4 的实系数多项式全体），$T \in \mathcal{L}(V)$，T' 是 T 的对偶映射。已知 $\ker T' = \operatorname{span}(\phi)$，$\phi \in V'$，$\phi(p) = p(18)$，$\forall p \in V$。求 $\operatorname{im} T$。
8. 设 V 是有限维的，$\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$ 是 V' 的基。证明：存在 V 的基使得其对偶基为 $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$。
9. 设 $\nu_1, \ldots, \nu_n$ 为有限维线性空间 V 中的一组基，$\phi_1, \ldots, \phi_n$ 为其对偶基。对 $\forall \psi \in V'$，证明：
$$\psi = \psi(\nu_1)\phi_1 + \cdots + \psi(\nu_n)\phi_n.$$
10. A 为 n 阶实方阵。视 $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$，$v \mapsto Av$。记 A^T 为 A 的转置。证明：
$$\dim E(\lambda, A) = \dim E(\lambda, A^T).$$
11. 设算子 T 的特征值仅为 1，代数重数为 5，几何重数为 3，求 T 的所有可能的若当标准形及相应的极小多项式。
12. 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$，求 A 的若当标准形 J 和矩阵 P，使得 $P^{-1}AP = J$。

第 4 章 内积空间

4.1 内积和范数

4.1.1 内积和范数的定义及性质

定义 4.1 (内积)

内积是将线性空间 V 中元素的每个有序对 (u, v) 映射成一个数 $\langle u, v\rangle \in F$ 的函数，并且满足以下性质：

- 正定性：$\forall v \in V$，$\langle v, v\rangle \geq 0$，且 $\langle v, v\rangle = 0 \iff v = 0$。
- 第一个位置的加性：$\forall u, v, w \in V$，$\langle u + v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$。
- 第一个位置的齐性：$\forall \lambda \in F, \forall u, v \in V$，$\langle \lambda u, v\rangle = \lambda\langle u, v\rangle$。
- 共轭对称性：$\forall u, v \in V$，$\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle}$。(在实内积空间中退化为对称性 $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$)。

♣

定义 4.2 (范数)

由内积确定的向量 v 的范数（长度）定义为 $||v|| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$。

♣

4.1.2 正交与基本不等式

定义 4.3 (正交)

两个向量 $u, v \in V$ 称为正交的，如果 $\langle u, v\rangle = 0$。

♣

定理 4.1 (基本定理与不等式)

- 勾股定理：若 u, v 正交，则 $||u + v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2$。
- 正交分解：设 $v \neq 0$，对任意 u，令 $c = \frac{\langle u,v\rangle}{||v||^2}$，则 $w = u - cv$ 与 v 正交，且 $u = cv + w$。
- **Cauchy-Schwarz** 不等式：$|\langle u, v\rangle| \leq ||u||||v||$。等号成立当且仅当两者之一是另一个的标量倍。
- 三角不等式：$||u + v|| \leq ||u|| + ||v||$。
- 平行四边形恒等式：$||u + v||^2 + ||u - v||^2 = 2(||u||^2 + ||v||^2)$。

♡

4.2 标准正交基

4.2.1 定义与性质

定义 4.4 (标准正交基)

如果一个向量组的每个向量范数都是 1 且相互正交（即 $\langle e_j, e_k\rangle = \delta_{jk}$），则称其为标准正交组。由标准正交组构成的基称为标准正交基。

♣

定理 4.2

设 $e_1, \ldots, e_n$ 是 V 的标准正交基，且 $v \in V$，则：

- **Fourier** 展开：$v = \langle v, e_1\rangle e_1 + \cdots + \langle v, e_n\rangle e_n$。
- **Parseval** 恒等式：$||v||^2 = |\langle v, e_1\rangle|^2 + \cdots + |\langle v, e_n\rangle|^2$。

♡

4.2.2 Gram-Schmidt 正交化与 Schur 定理

定理 4.3 (Gram-Schmidt 过程)

设 $v_1, \ldots, v_m$ 是线性无关向量组。令 $e_1 = \frac{v_1}{||v_1||}$。对于 $j = 2, \ldots, m$，定义：

$$u_j = v_j - \langle v_j, e_1 \rangle e_1 - \cdots - \langle v_j, e_{j-1} \rangle e_{j-1}$$
$$e_j = \frac{u_j}{||u_j||}$$

则 $e_1, \ldots, e_m$ 是标准正交组，且 $\operatorname{span}(v_1, \ldots, v_j) = \operatorname{span}(e_1, \ldots, e_j)$。

定理 4.4 (Schur 定理)

设 V 是有限维复内积空间，$T \in \mathcal{L}(V)$，则 T 关于 V 的某个标准正交基具有上三角矩阵。

4.3 Riesz 表示定理与 Gram 矩阵

定理 4.5 (Riesz 表示定理)

设 V 是有限维内积空间，φ 是 V 上的线性泛函，则存在唯一的向量 $u \in V$ 使得对 $\forall v \in V$ 均有 $\varphi(v) = \langle v, u \rangle$。

- **Gram 矩阵**：取定一组基，内积运算可表示为 $\langle v, w \rangle = \alpha G \overline{\beta}^T$，其中 G 为 Gram 矩阵。在标准正交基下，Gram 矩阵为单位矩阵 I。

4.4 正交补与正交投影

4.4.1 正交补

定义 4.5 (正交补)

子集 U 的正交补 $U^\perp = \{v \in V \mid \forall u \in U, \langle v, u \rangle = 0\}$。

定理 4.6

设 U 是有限维子空间，则：
- $V = U \oplus U^\perp$
- $\dim U^\perp = \dim V - \dim U$
- $(U^\perp)^\perp = U$

4.4.2 正交投影与极小化

定义 4.6 (正交投影)

设 $V = U \oplus U^\perp$，对 $v \in V$ 唯一分解为 $v = u + w\,(u \in U, w \in U^\perp)$，定义正交投影算子 $P_U v = u$。

定理 4.7

正交投影 P_U 满足：$P_U^2 = P_U$（幂等性），$\operatorname{im} P_U = U$，$\ker P_U = U^\perp$，$v - P_U v \in U^\perp$。

定理 4.8 (极小化问题 / 最佳逼近)

设 U 是 V 的有限维子空间，$v \in V$。对任意 $u \in U$，有：

$$||v - P_U v|| \leq ||v - u||$$

等号成立当且仅当 $u = P_U v$。该定理是最小二乘法的几何理论基础。

第 4 章 练习

1. 设 e_1, e_2, e_3, e_4 是欧式空间 $\mathbf{R}^4$ 的标准正交基，设

$$\alpha_1 = e_1 - e_2,\ \alpha_2 = e_2 - e_3,\ \alpha_3 = e_3 - e_4,$$

$$\beta_1 = e_4,\ \beta_2 = e_1 + e_2 + e_3,\ \beta_3 = e_4 - e_1 - 2e_2 - 3e_3.$$

   求 $w \in \mathbf{R}^4$ 使得 $\langle \alpha_j, w \rangle < 0$ 且 $\langle \beta_j, w \rangle > 0$，$j = 1, 2, 3$。

2. 设 $S \in \mathcal{L}(V)$ 是 V 上的一个单的算子，定义 $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ 如下：对 $u, v \in V$ 有 $\langle u, v \rangle_1 = \langle Su, Sv \rangle$。证明：$\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ 是 V 上的一个内积。

3. 对 $x = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbf{C}^n$，定义 1 范数为 $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$，设 $A = (a_{ij})_{n\times n} \in \mathbf{C}^{n\times n}$。(1) 求 A 关于 1 范数的矩阵范数 $\|A\|_1 = \max\{\|AX\|_1 : \|X\|_1 = 1\}$；(2) 已知 $B = (b_{ij})_{n\times n} \in \mathbf{C}^{n\times n}$，$|a_{ij}| \leq b_{ij}$，$1 \leq i, j \leq n$。证明：对任何正整数 m，有 $\|A^m\|_1 \leq \|B^m\|_1$；(3) 设 $|a_{ii}| < 1$，$1 \leq i \leq n$，$a_{ij} = 0\ (i > j)$。证明：$\|A^m\|_1 \to 0\ (m \to \infty)$。(提示：若 $a_{ij} = 0\ (i > j)$，则 $A^n = O$)

第 5 章 空间解析几何

5.1 基本方程

5.1.1 平面方程

- **点法式**：已知平面过点 (x_0, y_0, z_0) 且法向量为 $\boldsymbol{n} = (a, b, c)$，则方程为
$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$
- **一般式**：
$$ax + by + cz + d = 0$$
- **截距式**：已知平面在三坐标轴上的截距分别为 a, b, c，则方程为
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

5.1.2 直线方程

- **参数方程/对称式**：已知直线过点 (x_0, y_0, z_0) 且方向向量为 $\boldsymbol{s} = (l, m, n)$，则方程为
$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} (= t)$$
- **一般式（平面交线）**：由两个相交平面的方程联立构成
$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$

5.2 几何关系判定

几何位置关系可以通过联立平面/直线方程组，并分析系数矩阵 A 与增广矩阵 $\bar{A}$ 的秩 (Rank) 来判定。

5.2.1 平面与平面的关系 (2 个方程)

将两个平面一般式方程联立：

系数矩阵秩 $R(A)$	**增广矩阵秩** $R(\bar{A})$	**方程组解的情况**	**几何关系**
2	2	无穷多解	两平面交于一条直线
1	2	无解	两平面平行
1	1	无穷多解	两平面重合

5.2.2 直线与平面的关系 (3 个方程)

将直线的两个平面交线方程与目标平面方程联立：

系数矩阵秩 $R(A)$	**增广矩阵秩** $R(\bar{A})$	**方程组解的情况**	**几何关系**
3	3	唯一解	线面交于一点
2	3	无解	线面平行
2	2	无穷多解	直线在平面内

5.2.3 直线与直线的关系 (4 个方程)

将两条直线的四个平面方程联立：

系数矩阵秩 $R(A)$	增广矩阵秩 $R(\bar{A})$	方程组解的情况	几何关系
3	4	无解	异面直线（不共面）
3	3	唯一解	两线交于一点（共面）
2	3	无解	两线平行且不相交（共面）
2	2	无穷多解	两线重合

5.3 度量计算 (距离与夹角)

5.3.1 距离公式

- **点到平面的距离**：点 $P(x_1, y_1, z_1)$ 到平面 $ax + by + cz + d = 0$
$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$
- **点到直线的距离**：可通过构造直角三角形，利用勾股定理计算，或利用向量叉乘计算。
- **两条平行直线的距离**：设两直线方向向量为 $\boldsymbol{s_1}$，分别过点 P_1, P_2
$$d = \frac{|\boldsymbol{s_1} \times \vec{P_1P_2}|}{|\boldsymbol{s_1}|}$$
- **两条异面直线的距离**：设方向向量分别为 $\boldsymbol{s_1}, \boldsymbol{s_2}$，分别过点 P_1, P_2
$$d = \frac{|(\boldsymbol{s_1} \times \boldsymbol{s_2}) \cdot \vec{P_1P_2}|}{|\boldsymbol{s_1} \times \boldsymbol{s_2}|}$$

5.3.2 夹角公式

- **面面夹角**：平面法向量为 $\boldsymbol{n_1}, \boldsymbol{n_2}$
$$\theta = \arccos \frac{|\boldsymbol{n_1} \cdot \boldsymbol{n_2}|}{|\boldsymbol{n_1}||\boldsymbol{n_2}|}$$
- **线线夹角**：直线方向向量为 $\boldsymbol{s_1}, \boldsymbol{s_2}$
$$\theta = \arccos \frac{|\boldsymbol{s_1} \cdot \boldsymbol{s_2}|}{|\boldsymbol{s_1}||\boldsymbol{s_2}|}$$
- **线面夹角**：直线方向向量为 $\boldsymbol{s}$，平面法向量为 $\boldsymbol{n}$（注意这里是正弦值）
$$\theta = \arcsin \frac{|\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{s}|}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{s}|}$$