期末复习（下）讲义

“复向量空间上，一个线性算子 T 的结构到底由什么决定？”

“复向量空间上，一个矩阵可能的最简单（有尽可能多的 0）的形式是什么样的？对应的基是什么？”

目录

复向量空间上的算子

1 为什么本征向量不够用

1.1 一个不可对角化的 Jordan 块

考虑下面复向量空间上矩阵的特征空间

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

2 广义本征向量与广义本征子空间

2.1 零空间的性质

设 $T \in \mathcal{L}(V)$，则

$$\{0\} = \operatorname{null} T^0 \subset \operatorname{null} T^1 \subset \cdots \subset \operatorname{null} T^k \subset \operatorname{null} T^{k+1} \subset \cdots$$

若存在 m 为非负整数，使得

$$\operatorname{null} T^m = \operatorname{null} T^{m+1}$$

则

$$\operatorname{null} T^m = \operatorname{null} T^{m+1} = \operatorname{null} T^{m+2} = \operatorname{null} T^{m+3} = \cdots$$

零空间最多递增到 $\operatorname{null} T^{\dim v}$ 时停止增长, 此时有如下结论

$$V = \operatorname{null} T^n \oplus \operatorname{range} T^n.$$

证明思路: 维数公式 + $(\operatorname{null} T^n) \cap (\operatorname{range} T^n) = \{0\}$

2.2 广义本征向量

设 $T \in \mathcal{L}(V)$，$\lambda \in \mathbb{C}$。非零向量 $v \in V$ 称为 T 关于 λ 的广义本征向量，如果存在正整数 k，使得

$$(T - \lambda I)^k v = 0.$$

2.3 广义本征空间

对应本征值 λ 的广义本征空间记作

$$G(\lambda, T) = \{v \in V : (T - \lambda I)^k v = 0 \text{ 对某个正整数} k \text{ 成立}\}.$$

在有限维空间中，可写成

$$G(\lambda, T) = \mathrm{null}(T - \lambda I)^{\dim V}.$$

证: 零空间在 $\dim v$ 时停止增长

广义本征空间的维数称作该本征值的**代数重数**, 而本征空间的维数称为**几何重数**

2.4 广义本征子空间是 T-不变的

如果 $v \in G(\lambda, T)$，则存在 k 使得

$$(T - \lambda I)^k v = 0.$$

因为 T 与 $T - \lambda I$ 可交换，所以

$$(T - \lambda I)^k (Tv) = T(T - \lambda I)^k v = 0.$$

因此 $Tv \in G(\lambda, T)$。这说明 $G(\lambda, T)$ 是 T-不变子空间。

2.5 线性无关的广义本征向量

设 $T \in \mathcal{L}(V)$，$\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ 是 T 的所有不同的本征值，$v_1, \ldots, v_m$ 分别为相应的广义本征向量。则

$$v_1, \ldots, v_m$$

线性无关。

3 幂零算子

3.1 定义

线性算子 $N \in \mathcal{L}(V)$ 称为幂零算子，如果存在正整数 m，使得

$$N^m = 0.$$

3.2 $T = \lambda I + N$

在 $G(\lambda, T)$ 上，定义

$$N = T - \lambda I.$$

由广义特征子空间的定义, N 在这个子空间上是幂零算子。因此

$$T = \lambda I + N.$$

重点结论：在每个广义本征空间上，算子就是“一个数倍恒等算子 + 一个幂零算子”。

3.3 幂零算子的矩阵

设 N 是 V 上的幂零算子，那么 V 有一个基，使得 N 关于这个基的矩阵形如

$$\begin{pmatrix} 0 & * & \cdots & * \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix},$$

其中对角线和对角线下方的元素都是 0。

证:
法 1: 复空间内, 矩阵可写成上三角形式, 且对角线元素为算子的特征值, 因此只需证明幂零算子的特征值只有 0.
法 2: null $N \to$ null $N^2 \to$ ... 基的扩充来构造基

4 广义本征空间分解

4.1 核心定理

设 V 是有限维复向量空间，$T \in \mathcal{L}(V)$，$\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ 是 T 的所有互异本征值。则

$$V = G(\lambda_1, T) \oplus \cdots \oplus G(\lambda_m, T).$$

证: 归纳法
这意味着:

1. 每个向量都可以唯一写成来自不同广义本征空间的和。
2. 不同本征值对应的广义本征空间互不混杂。

因此研究整个 T 的问题，可以分解成分别研究每个 $G(\lambda_j, T)$ 上的 T。

4.2 分解之后

一旦有了

$$V = G(\lambda_1, T) \oplus \cdots \oplus G(\lambda_m, T),$$

将算子限制在任意 $G(\lambda_j, T)$ 空间上后, 根据 3.2 可以得到

$$T|_{G(\lambda_j,T)} = \lambda_j I + N_j,$$

由此, T 可以写成具有上三角块的分块对角矩阵:

$$\begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_m \end{pmatrix}$$

其中

$$A_j = \begin{pmatrix} \lambda_j & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_j \end{pmatrix}$$

至此, 矩阵已经非常简单了 (比上三角矩阵更多的 0), 接下来将会对幂零算子 N_j 的结构进行进一步挖掘, 来使得上式中的每个 A_j 都更简单

5 Jordan 标准型

5.1 对应于幂零算子的基

设 $N \in \mathcal{L}(V)$ 是幂零的。则存在向量 $v_1, \ldots, v_n \in V$ 和非负整数 $m_1, \ldots, m_n$，使得

$$N^{m_1} v_1, \ldots, N v_1, v_1, \ldots, N^{m_n} v_n, \ldots, N v_n, v_n$$

是 V 的基, 且

$$N^{m_1+1} v_1 = \cdots = N^{m_n+1} v_n = 0.$$

证: 数学归纳法 + 构造基

$$\{N^{m_1+1} u_1, \ldots, N u_1, u_1, \ldots, N^{m_n+1} u_n, \ldots, N u_n, u_n, u_{n+1}, \ldots, u_{n+p}\}$$

5.2 关于 5.1 中基的性质

对于 5.1 中给出的基, 每个 j，N 都将组 $N^{m_j} v_j, \ldots, N v_j, v_j$ 中的第一个向量映成 0, 并且 N 将这个组中除第一个向量之外的其余向量映成了它的前一个向量。也就是说，N 具有分块对角矩阵，其中对角线上的每个矩阵 A_j 都形如

$$A_j = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}.$$

(23) 上面给出的矩阵已经比 (20) 中给出的矩阵简单更多了 (除了紧贴着对角线上面的元素之外都是 0), 但暂时的结果只针对于幂零算子, 接下来利用 $G(\lambda, T)$ 子空间的性质 (4.2 节) 进一步将结果拓展到任意一个复向量空间算子上

5.3 Jordan 标准型

对于复向量空间内任意一个算子, 根据 (23) , 4.2 节的结论可以再次加强成如下形式

$$\begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_p \end{pmatrix},$$

其中每个 A_j 都形如

$$A_j = \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_j \end{pmatrix}.$$

(24) 矩阵称为算子的 Jordan 标准型, 对应的基称为 Jordan 基, 基中每个

$$N^{m_1}v_1, \ldots, Nv_1, v_1$$

部分对应的矩阵块称为一个 Jordan 块

5.4 Jordan 块对应的链

在 Jordan 基的构造过程中, 我们可以注意到幂零算子 $N = T - \lambda I$ 对基中每个 $N^{m_i}v_i, \ldots, Nv_i, v_i$ 部分的作用:

$$v_j \mapsto Nv_j \mapsto N^2v_j \mapsto \cdots \mapsto N^{m_j}v_j \mapsto 0.$$

我们将 $N^{m_i}v_i, \ldots, Nv_i, v_i$ 称为一个 Jordan 链, 将一条 Jordan 链中的向量对应到 Jordan 基中可以看出, 一条 Jordan 链对应 Jordan 标准型中的一个 Jordan 块

6 特征多项式与 Cayley-Hamilton 定理

6.1 特征多项式

特征多项式 p_T 记录 T 的本征值及其代数重数。在复向量空间上，它可以写成

$$p_T(z) = (z - \lambda_1)^{d_1} \cdots (z - \lambda_m)^{d_m}$$

其中 $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ 是互异本征值，指数 d_j 是对应的代数重数。

6.2 Cayley-Hamilton 定理

Cayley-Hamilton 定理:

$$p_T(T) = 0.$$

证: 向量分解 $v = v_1 + v_2 + ... + v_m$

7 极小多项式

7.1 定义

极小多项式 m_T 是所有满足

$$p(T) = 0$$

的首一多项式 p 中次数最低的那个。(首一多项式是指次数最大项系数为 1 的多项式)

7.2 基本性质

极小多项式满足:

1. $m_T(T) = 0$。
2. 如果 $p(T) = 0$，则 m_T 整除 p。
3. 特别地，由 Cayley-Hamilton 定理 $p_T(T) = 0$，所以

$$m_T \mid p_T$$

即特征多项式是极小多项式的多项式倍

4. 极小多项式的零点恰好是 T 的本征值。

性质 4: 由性质 3 可以得到, 极小多项式的根一定是算子的本征值, 性质 4 说明, 算子的本征值一定是极小多项式的根, 不会变少, 这里可以从向量分解 $v = v_1 + v_2 + ... + v_m$ 上理解, 如果极小多项式在特征多项式 $p_T(z) = (z - \lambda_1)^{d_1} \cdots (z - \lambda_m)^{d_m}$ 的基础上少了某个根 λ_i, 那么分解后的向量 v_i 就无法被消掉了, 此处可以理解到, 极小多项式中本征值 λ_i 项的次数其实就是对应的最长一条 Jordan 链的长度, 这样就可以保证对应广义特征子空间中所有基都被消掉

7.3 极小多项式与最大 Jordan 块

如果 T 的 Jordan 形中，对应本征值 λ 的最大 Jordan 块大小为 r，那么极小多项式中对应因子的最高次数就是 r:

$$m_T(z) = \prod_{j=1}^{m} (z - \lambda_j)^{r_j},$$

其中 r_j 是本征值 λ_j 对应最大 Jordan 块的大小。

证: 考虑 λ_i 对应的所有 Jordan 链, 其中至少有一条链长度等于 r, 即最大 Jordan 块大小为 r

重点结论: 极小多项式不关心某个大小的 Jordan 块有几个，只关心最大块有多大。

7.4 推论: 对角化判别

在复向量空间上，

$$T \text{ 可对角化} \iff \text{极小多项式没有重根.}$$

也就是

$$m_T(z) = (z - \lambda_1) \cdots (z - \lambda_m)$$

时，T 可对角化, 否则存在最大 Jordan 块大小大于 1, 不可对角化。

8 Jordan 标准型总结

8.1 几何重数与 Jordan 标准型的关系

固定一个本征值 λ，设对应的普通本征空间为

$$E(\lambda, T) = \operatorname{null}(T - \lambda I).$$

则:

$$\dim E(\lambda, T) = \lambda \text{ 对应的 Jordan 块数量.}$$

即**几何重数等于该本征值对应的 Jordan 块个数**。

证: 考虑广义本征空间 $G(\lambda, T)$ 中，每个 Jordan 块对应一条 Jordan 链

$$N^m v,\ N^{m-1} v,\ \ldots,\ Nv,\ v,$$

这条链满足:

$$N(N^m v) = N^{m+1} v = 0.$$

因此链最前端的向量

$$N^m v$$

属于

$$\operatorname{null} N = \operatorname{null}(T - \lambda I) = E(\lambda, T).$$

所以，**每一条 Jordan 链都会贡献一个本征子空间维度**。

8.2 Jordan 块与几个重要量的关系

结构信息	Jordan 形中怎么看
本征值	每个块对角线上出现的 λ
代数重数	对应 λ 的所有 Jordan 块大小之和
几何重数	对应 λ 的 Jordan 块个数
极小多项式次数	对应 λ 的最大 Jordan 块大小
可对角化	所有 Jordan 块大小都是 1

8.3 可对角化的等价表述

在有限维复向量空间上，下面说法等价：

1. T 可对角化。
2. V 有一组由 T 的本征向量组成的基。
3. 对每个本征值，广义本征空间等于普通本征空间。
4. 所有 Jordan 块大小都是 1。
5. 极小多项式没有重根。

实向量空间上的算子

9 复化

9.1 复空间的结论在实空间中会失效

前一部分复向量空间中能得到完整结构，关键原因是复数域上多项式可以完全分解。因此复算子总能找到本征值，并能围绕本征值建立广义本征空间分解。实向量空间上情况不同：实多项式不一定能分解成一次实因子。因此实算子不一定有实本征值。

9.2 复化定义

实向量空间 V 的复化（记作 $V_{\mathbb{C}}$）等于 $V \times V$，其元素是有序对 (u, v)，其中 $u, v \in V$，我们把它写作 $u + iv$。

如果 V 是实向量空间，可以构造对应的复向量空间 $V_{\mathbb{C}}$。实算子 T 可以扩展成复算子

$$\forall u, v \in V, T_{\mathbb{C}}(u + iv) = T(u) + iT(u)$$

在复空间中，$T_{\mathbb{C}}$ 可以使用本征值、广义本征空间和结构分解等工具。分析完成后，再把结论翻译回原来的实空间。

9.3 性质

复化后有如下性质:

1. $V_{\mathbb{C}}$ 是复向量空间
2. 设 V 是实向量空间。
   (a) 如果 $v_1, \ldots, v_n$ 是 V 作为实向量空间的基，则它也是 $V_{\mathbb{C}}$ 作为复向量空间的基。
   (b) $V_{\mathbb{C}}$ 作为复向量空间的维数等于 V 作为实向量空间的维数，即
   $$\dim_{\mathbb{C}} V_{\mathbb{C}} = \dim_{\mathbb{R}} V.$$
3. 设 $v_1, \ldots, v_n$ 是实向量空间 V 的基，且 $T \in \mathcal{L}(V)$。则
   $$\mathcal{M}(T) = \mathcal{M}(T_{\mathbb{C}}),$$
   其中这两个矩阵都是关于基 $v_1, \ldots, v_n$ 的矩阵。
4. $T_{\mathbb{C}}$ 的极小多项式等于 T 的极小多项式
5. 实本征值 λ 是 $T_{\mathbb{C}}$ 的本征值当且仅当 λ 是 T 的本征值。
6. 设 V 是实向量空间，$T \in \mathcal{L}(V)$, 则 $T_{\mathbb{C}}$ 的特征多项式的系数都是实数, 因此将 T 的特征多项式定义为 $T_{\mathbb{C}}$ 的特征多项式。

10 实向量空间算子的性质与定理

10.1 每个算子都有一维或二维不变子空间

非零的有限维实向量空间上的每个算子都有一维或二维不变子空间。

10.2 Cayley-Hamilton 定理:

设 $T \in \mathcal{L}(V)$，q 是 T 的特征多项式，则

$$q(T) = 0$$

10.3 特征多项式是极小多项式的多项式倍

设 $T \in \mathcal{L}(V)$, 则:

(a) T 的极小多项式的次数至多是 $\dim V$;

(b) T 的特征多项式是 T 的极小多项式的多项式倍。

10.4 $T_{\mathbb{C}} - \lambda I$ 和 $T_{\mathbb{C}} - \overline{\lambda} I$

设 V 是实向量空间，$T \in \mathcal{L}(V)$，$\lambda \in \mathbb{C}$，j 是非负整数，$u, v \in V$。则

$$(T_{\mathbb{C}} - \lambda I)^j (u + iv) = 0 \Leftrightarrow (T_{\mathbb{C}} - \overline{\lambda} I)^j (u - iv) = 0.$$

由此可得到 2.5 中的推论

10.5 $T_{\mathbb{C}}$ 的非实本征值成对出现

设 V 是实向量空间，$T \in \mathcal{L}(V)$，$\lambda \in \mathbb{C}$。则 λ 是 $T_{\mathbb{C}}$ 的本征值当且仅当 $\overline{\lambda}$ 是 $T_{\mathbb{C}}$ 的本征值。

10.6 λ 的重数等于 $\overline{\lambda}$ 的重数

设 V 是实向量空间，$T \in \mathcal{L}(V)$，$\lambda \in \mathbb{C}$ 是 $T_{\mathbb{C}}$ 的本征值。则 λ 作为 $T_{\mathbb{C}}$ 的本征值的重数等于 $\overline{\lambda}$ 作为 $T_{\mathbb{C}}$ 的本征值的重数。

10.7 奇数维向量空间上的算子有本征值

由 2.5 和 2.6 的结论可以推出, 奇数维实向量空间上的每个算子都有本征值。

11 实正规算子与等距同构

11.1 实正规算子

设 V 是实内积空间，$T \in \mathcal{L}(V)$。则以下条件等价：

(a) T 是正规的。

(b) V 有规范正交基，使得 T 关于这个基有分块对角矩阵，对角线上的每个块是 1×1 矩阵，或者是形如

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

的 2×2 矩阵，其中 $b>0$。

11.2 实等距同构

设 V 是实内积空间，$S \in \mathcal{L}(V)$。则以下条件等价：

(a) S 是等距同构。

(b) V 有规范正交基，使得 S 关于这个基有分块对角矩阵，对角线上的每个块是由 1 或 -1 构成的 1×1 矩阵，或者是形如

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

的 2×2 矩阵，其中 $\theta \in (0,\pi)$。

习题讲解

1.

设 T 为维数为 n 的向量空间 V 上的幂零算子，且 $r(T)=1$，$n\geq 3$。
求 T 的若当标准型。并证明：V 上存在无穷多个二维的 T 不变子空间。

2.

设 $A\in\mathbb{C}^{7\times 7}$，且存在矩阵 $B\in\mathbb{C}^{7\times 7}$ 和向量 $X\in\mathbb{C}^{7\times 1}$，满足

$$A=B^2, A^3X\neq 0, A^4X=0.$$

证明：

$$\operatorname{rank}(A)=5$$

3.

已知 $T\in\mathcal{L}(\mathbb{C}^3)$，其对应矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2023 & 0 & 0 \\ 6 & 28 & 0 \end{pmatrix}.$$

（1）求 A 的 Jordan 标准形（不必求 Jordan 基）;
（2）证明不存在复矩阵 B 使得 $B^2=A$.

4.

$T\in\mathcal{L}(V)$。有极分解

$$T=S\sqrt{G},$$

其中 S 是等距同构，$G=T^*T$。证明以下条件等价：（1）T 是正规算子;
（2）

$$GS=SG;$$

（3）G 的所有特征空间 $E(\lambda,G)$ 都是 S-不变的。

5.

设 $G=T^*T$，证明下列命题等价：
（1）T 为正规算子。

（2）存在一个等距同构 S，使得对任意 $v \in V$ 有

$$Tv = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{d_i}\sqrt{\lambda_i}\langle v, \varepsilon_{i,j}\rangle S(\varepsilon_{i,j}),$$

其中

$$\{\varepsilon_{i,1}, \ldots, \varepsilon_{i,d_i}\}$$

为 $E(\lambda_i, G)$ 的一组标准正交基，并且每个子空间 $E(\lambda_i, G)$ 在 S 作用下都是不变子空间。

（3）存在等距同构算子 S'，使得

$$T^2 = S'G, \qquad \mathrm{Im}(T) = (\ker T)^{\perp}.$$

6. 判断题

(1) 若 T 为 $\mathbb{R}^3$ 上的实算子，且 T 只有特征值 1,2，则

$$T^2 - 3T + 2I = 0.$$

(2) 若 T 为 $\mathbb{R}^4$ 上的实算子，且 T 有非平凡子空间，则 T 存在本征值。

(3) 若 T 为实内积空间上的算子，且在某组基下的矩阵为对称矩阵，则 T 是自伴算子。

(4) 设 s 为算子 T 的奇异值，则存在单位向量 α，使得

$$\|T\alpha\| = s.$$

(5)$T \in \mathcal{L}(V)$ 是非幂零算子，满足

$$\operatorname{null} T^{n-1} \neq \operatorname{null} T^{n-2}.$$

则其极小多项式为

$$m(\lambda) = \lambda^{n-1}(\lambda - a), \qquad 0 \neq a \in \mathbb{R}$$

(6)$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$，$S_1 = A^{\mathrm{T}} + A$，$S_2 = A^{\mathrm{T}} - A$。则 A 是正规矩阵当且仅当

$$S_1S_2 = S_2S_1.$$