线性代数 I（H）期末历年卷试题集

2009-2010 学年线性代数 I（H）期末

任课老师：统一命卷　　　　考试时长：120 分钟

一、（10 分）记 $C([0,2\pi],\mathbf{R})$ 是区间 $[0,2\pi]$ 上全体连续函数作成的实线性空间，对 $f,g\in C([0,2\pi],\mathbf{R})$，用

$$(f,g)=\int_0^{2\pi} f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

来定义内积. 如果

$$f,g:[0,2\pi]\to\mathbf{R}, f(x)=x, g(x)=\sin x$$

求 f 与 g 的夹角 θ.

二、（10 分）设 V 是次数 ≤ 2 的实多项式线性空间，$T:V\to V$,

$$T(f(x))=f(x)+xf'(x).$$

求 T 的特征值. 对于每个特征值，求属于它的特征子空间.

三、（10 分）设 B 是 3×1 矩阵，C 是 1×3 矩阵，证明：$r(BC)\leq 1$；反之，若 A 是秩为 1 的 3×3 矩阵，证明：存在 3×1 矩阵 B 和 1×3 矩阵 C，使得 $A=BC$.

四、（10 分）设矩阵 $A=\begin{pmatrix} a & -1 & 1 \\ -1 & a & -1 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix}, \beta=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. 假设线性方程组 $AX=\beta$ 有解但解不唯一.

(1) 求 a 的值；

(2) 给出 $AX=\beta$ 的一般解.

五、（10 分）设 A 是可逆实矩阵.

(1) 证明 $A^{\mathrm{T}}A$ 是对称矩阵；

(2) 证明 $A^{\mathrm{T}}A$ 是正定的.

六、（10 分）令 $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 2\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix}\in M_{3\times 3}(\mathbf{R})$.

(1) 求可逆矩阵 $Q\in M_{3\times 3}(\mathbf{R})$ 使 $Q^{\mathrm{T}}AQ$ 是对角矩阵；

(2) 给出 A 的正惯性指数、负惯性指数，并确定 A 的定性.

七、（10 分）设 $\beta=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ 是 V 的一组基，$T:V\to V$ 是线性变换，

$T(v_1)=v_2,T(v_2)=v_3,\ldots,T(v_{n-1})=v_n,T(v_n)=a_1v_1+a_2v_2+\cdots+a_nv_n$.

求 T 关于 β 的矩阵表示. 以及，在什么条件下 T 是同构?

八、（10 分）设 $A\in M_{n\times n}(\mathbf{F})$ 有两个不同的特征值 λ_1,λ_2，且属于 λ_1 的特征子空间的维数是 $n-1$，证明：A 是可对角化的.

九、（20 分）判断下面命题的真伪. 若它是真命题，给出一个简单证明；若它是伪命题，举一个具体的反例将它否定.

(1) 给定线性空间 V 的非零向量 v 和线性空间 W 的向量 w，总存在线性映射 $T:V\to W$ 使得 $T(v)=w$.

(2) 若线性方程组有 m 个方程，n 个变量，且 $m<n$，则这个方程组一定有非零解.

(3) 若 n 阶方阵 A 的秩是 n，则 A 是可逆的.

(4) 正交变换是可对角化的.