2010-2011 学年线性代数 I（H）期末

任课老师：统一命卷　　　　考试时长：120 分钟

一、（10 分）求全部的实数 a，使线性方程组 $\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3=2 \\ x_1-x_2-2x_3=-3 \\ ax_1-2x_2+2x_3=6 \end{cases}$ 的解集非空.

二、（10 分）设 $M_{3\times 2}(\mathbf{F})$ 是数域 $\mathbf{F}$ 上全体 3×2 矩阵构成的线性空间，

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, Q=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

定义 $T: M_{3\times 2}(\mathbf{F}) \to M_{3\times 2}(\mathbf{F})$ 如下，对任意的 $A\in M_{3\times 2}(\mathbf{F})$ 有 $T(A)=PAQ$.

(1) 证明 T 是线性映射.

(2) 求出 T 的像空间和核空间.

(3) 验证关于 T 的维数公式.

三、（10 分）设 A 和 B 是 n 阶方阵，其中 n 是奇数. 若 $AB=-BA$，证明：A 是不可逆的或者 B 是不可逆的.

四、（10 分）设 V 是欧氏空间，$\mathbf{u},\mathbf{v}\in V$ 且 $\mathbf{v}\neq \mathbf{0}$. 证明

$$|(\mathbf{u},\mathbf{v})|=|\mathbf{u}||\mathbf{v}|$$

当且仅当存在 $\lambda\in\mathbf{R}$，使 $\mathbf{u}=\lambda\mathbf{v}$.

五、（10 分）设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 是实正交矩阵.

(1) 证明 $|\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii}|\leq n$.

(2) 在什么条件下等式成立?

六、（10 分）求 2×2 实矩阵 A，使得 A 的特征值是 2 和 1，而对应于 2 的特征子空间由 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 生成，对应于 1 的特征子空间由 $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ 生成.

七、（10 分）设 n 阶方阵 A 和 B 都可对角化，并且它们有相同的特征子空间（但不一定有相同的特征值），证明 $AB=BA$.

八、（10 分）实三元二次多项式 $f:\mathbf{R^3}\to\mathbf{R}$ 的定义是

$$f(x,y,z)=2x^2-8xy+y^2-16xz+14yz+5z^2.$$

(1) 给出 3×3 实对称矩阵 A，使 $f(x,y,z)=(x,y,z)A(x,y,z)^{\mathrm{T}}$.

(2) 给出一个与 A 相合的对角矩阵.

(3) 给出 A 的秩，正惯性指数和负惯性指数.

九、（20 分）判断下面命题的真伪. 若它是真命题，给出一个简单证明；若它是伪命题，举一个具体的反例将它否定.

(1) 若线性映射 $T_1,T_2: V\to W$ 对 V 的一组基中的每一个基向量 v 满足 $T_1(v)=T_2(v)$，则 $T_1=T_2$.

(2) 若对于任何正整数 n，方阵 A（阶数大于 1）的 n 次乘积 A^n 都是非零方阵，则 A 可逆.

(3) 若线性映射 $T: V\to W$ 的核是 K，则 $\mathrm{dim}V=\mathrm{dim}W+\mathrm{dim}K$.

(4) 若方阵 A 相似于方阵 B，则 A 与 B 有相同的特征向量.