2011-2012 学年线性代数 I（H）期末

任课老师：统一命卷　　　　考试时长：120 分钟

一、（10 分）求 $a,b,c,d,e,f\in\mathbf{R}$，使 $(1,1,1)^{\mathbf{T}},(1,0,-1)^{\mathbf{T}},(1,-1,0)^{\mathbf{T}}\in\mathbf{R^3}$ 是矩阵 $\begin{pmatrix}1&-1&1\\a&b&c\\d&e&f\end{pmatrix}$ 的特征向量.

二、（10 分）记线性映射 σ 的核为 $\ker\sigma$，像为 $\mathrm{im}\ \sigma$. 设 $\sigma_1,\sigma_2:V\to V$ 是线性映射. 证明：

(1) $\ker\sigma_1\subseteq\ker(\sigma_2\circ\sigma_1)$.

(2) $\mathrm{im}\ (\sigma_2\circ\sigma_1)\subseteq\mathrm{im}\ \sigma_2$.

三、（10 分）设 $B=\{v_1,v_2,v_3\}$ 是线性空间 V 的一组基，线性映射 $\sigma:V\to V$ 定义如下：

$$\sigma(v_1)=v_2+v_3,\sigma(v_2)=v_3,\sigma(v_3)=v_1-v_2.$$

(1) 给出 σ 关于基 B 的矩阵表示.

(2) 证明 $B'=\{v_2,v_3+v_1,v_1-v_2\}$ 是 V 的另一组基.

(3) 给出 σ 关于基 B' 的矩阵表示.

四、（10 分）设 $\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ 是欧氏空间 V 的一组单位正交基. 证明：对于任何 $u\in V$，成立

$$|u|^2=(u,v_1)^2+(u,v_2)^2+\cdots+(u,v_n)^2.$$

五、（10 分）记 $P_2(\mathbf{R})$ 为次数小于等于 2 的实多项式线性空间.

(1) 证明：$(f,g)=\int_{-1}^{1}f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 是 $P_2(\mathbf{R})$ 的内积.

(2) 将 Schmidt 正交化过程应用于 $S=\{1,x,x^2\}$，求出 $P_2(\mathbf{R})$ 的一组单位正交基 B.

六、（10 分）设 $\sigma:V\to V$ 是有限维线性空间 V 上的一个同构映射. 记 $V(\sigma;\lambda)$ 为 σ 的属于特征值 λ 的特征子空间.

(1) 如果 λ 是 σ 的特征值，证明：$\lambda\neq0$.

(2) 证明 λ 是 σ 的特征值，证明：$V(\sigma;\lambda)=V(\sigma^{-1};\lambda^{-1})$.

(3) 证明 “σ 可对角化” 的充要条件是 “σ^{-1} 可对角化”.

七、（10 分）求下面实对称矩阵的秩，正惯性指数和负惯性指数.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 6 & 9 \\ 3 & -9 & 4 \end{pmatrix}$;

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & -5 & -1 \\ -2 & -5 & 10 & 9 \\ -3 & -1 & 9 & -14 \end{pmatrix}$.

八、（10 分）设 A, B 都是域 $\mathbf{F}$ 上的 n 阶对角矩阵，且 A 的对角元是 B 的对角元的一个置换. 证明：

(1) A 相似于 B.

(2) A 相合于 B.

九、（20 分）判断下面命题的真伪. 若它是真命题，给出一个简单证明；若它是伪命题，举一个具体的反例将它否定.

(1) 若 S 是线性空间 V 的线性相关子集，则 S 的每个向量都是 S 的其他向量的线性组合.

(2) 域 F 上的全体 n 阶可逆阵构成 $M_{n\times n}(F)$ 的一个子空间.

(3) 若存在正整数 n，使得方阵 A 的 n 次幂 $A^n = 0$，则 A 的行列式 $|A| = 0$.

(4) 对任意的 n 阶实对称阵 A，总存在 ϵ，使得 $E_n + \epsilon A$ 是正定矩阵.