2012-2013 学年线性代数 I（H）期末

任课老师：统一命卷　　　　考试时长：120 分钟

一、（10 分）求实线性方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 2 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 3 \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 4 \end{cases}$ 的解集.

二、（10 分）设 A 是域 $\mathbf{F}$ 上的 $m \times n$ 矩阵，A 的秩 $r(A) = 1$.

(1) 证明存在（列向量）$X \in \mathbf{F^m}$ 和 $Y \in \mathbf{F^n}$ 使得 $A = XY^{\mathbf{T}}$, 其中 $Y^{\mathbf{T}}$ 是 Y 的转置.

(2) X 和 Y 是否唯一?

三、（10 分）定义线性映射 $T : \mathbf{R^n} \to \mathbf{R^n}$ 如下：对任意的 $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{R^n}$

$$T(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1 + x_2, x_2 + x_3, \ldots, x_n + x_1).$$

试给出 T 的核 $\ker(T)$ 和 T 的像 $\mathrm{im}(T)$ 的维数.

四、（10 分）设 V 是域 $\mathbf{F}$ 上有限维线性空间，$T : V \to V$ 是线性映射. 证明 V 的非零向量都是 T 的特征向量当且仅当存在 $\alpha \in \mathbf{F}$，使 $T(v) = \alpha v$ 对于任何 $v \in V$ 成立.

五、（10 分）设 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 是可逆矩阵，其中 $b \neq 0$；λ 是 A 的特征值.

(1) 证明 $\lambda \neq 0$.

(2) 证明 $(b, \lambda - a)^{\mathbf{T}}$ 是属于 λ 的特征向量.

(3) 若 A 有两个不同的特征值 λ_1 和 λ_2，求可逆矩阵 P 使 $P^{-1}AP$ 是对角矩阵.

六、（10 分）实对称矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. 求正交矩阵 Q 使 $Q^{\mathbf{T}}AQ$ 是对角矩阵.

七、（10 分）设 V 是欧式空间，$T : V \to V$ 是线性映射，$\lambda \in \mathbf{R}$，u 是 V 的非零向量. 证明：λ 是 T 的特征值且 u 是属于 λ 的特征向量当且仅当对于任何 $v \in V$ 成立 $(T(u), v) = \lambda(u, v)$.

八、（10 分）设 n 阶实对称阵 A 满足方程 $A^2 - 6A + 5I_n = 0$，其中 I_n 是 n 阶单位矩阵.

(1) 证明 A 是正定的.

(2) 若 $n = 2$，试给出全部有可能与 A 相似（注意，不是相合!）的对角矩阵.

九、（20 分）判断下面命题的真伪. 若它是真命题，给出一个简单证明；若它是伪命题，举一个具体的反例将它否定.

(1) 若有限维线性空间 V 的线性映射 $T: V \to V$ 是可对角化的，则 T 是同构.

(2) 若 A, B 是对称矩阵，则 AB 也是对称矩阵.

(3) 若 n 阶方阵 A, B 中的 A 是可逆的，则 AB 与 BA 是相似的.

(4) 若 $n(n>1)$ 阶方阵 A 的特征多项式是 $f(\lambda)=\lambda^n$，则 A 是零矩阵.