2018-2019 学年线性代数 I（H）期末

任课老师：统一命卷　　　　考试时长：120 分钟

一、（10 分）设 $\mathbf{R}[x]_4$ 是数域 $\mathbf{R}$ 上次数小于 4 的多项式所构成的线性空间（约定零多项式次数为 $-\infty$）. $\mathbf{M}_2(\mathbf{R})$ 是 $\mathbf{R}$ 上 2 阶方阵所构成的线性空间，定义 $T:\mathbf{R}[x]_4\to\mathbf{M}_2(\mathbf{R})$ 如下，对 $f(x)\in\mathbf{R}[x]_4$，

$$T(f(x))=\begin{pmatrix} f(0) & f(1) \\ f(-1) & f(0)\end{pmatrix}.$$

(1) 求出 T 的核空间 $N(T)$ 和像空间 $R(T)$；

(2) 验证关于 T 的维数公式.

二、（10 分）已知矩阵 A 与 $B=\begin{pmatrix} 2 & 8 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 9\end{pmatrix}$ 相似，求：

(1) 行列式 $|A^2-9A+4E_4|$ 的值；

(2) $r(A^*)+r(9E_4-A)$，其中 A^* 是 A 的伴随矩阵.

三、（10 分）设 $\mathbf{R}^4$ 是 4 维欧氏空间（标准内积），$\alpha=(1,\ 1,\ 1,\ 1)$, $\beta=(-1,\ -1,\ 0,\ 2)$, $\gamma=(1,\ -1,\ 0,\ 0)\in\mathbf{R}^4$，求：

(1) 与 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ 都正交的一个单位向量 δ；

(2) $||\alpha+\beta+\gamma+\delta||$.

四、（10 分）设实二次型 $f(x_1,\ x_2,\ x_3)=ax_1^2+2x_2^2-2x_3^2+2bx_1x_3(b>0)$，二次型对应的矩阵 A 的特征值之和为 1，特征值之积为 -12.

(1) 求参数 $a,\ b$；

(2) 用正交变换将二次型 f 化为标准形，并写出所用的正交变换及标准形；

(3) 判断此二次型是否是正定二次型.

五、（10 分）设 A 是数域 $\mathbf{F}$ 上一个秩为 r 的 n 阶方阵，β 是一个 n 维非零列向量，X_0 是线性方程组 $AX=\beta$ 的一个解，$X_1,\ \ldots,\ X_s$ 是它的导出组 $AX=0$ 的一组线性无关解.

(1) 证明：向量组 $\{X_0,X_1,\ \ldots,\ X_s\}$ 线性无关；

(2) 求出包含 $AX=\beta$ 解集的最小线性空间 W（需写出基和维数）.

六、（10 分）线性变换 $T:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ 的定义是：

$$T(x_1,\ x_2,\ x_3)=(4x_1+x_3,\ 2x_1+3x_2+2x_3,\ x_1+4x_3).$$

(1) 求出 T 的特征多项式及特征值；

(2) 判断 T 是否可对角化，并给出理由.

七、（10 分）设 $A\in M_{m\times n}(\mathbf{F})$，$r(A)=r$，$k$ 是满足条件 $r\le k\le n$ 的任意整数，证明存在 n 阶方阵 B，使得 $AB=0$，且 $r(A)+r(B)=k$.

八、（10 分）设 A 是数域 $\mathbf{F}$ 上一个 n 阶方阵，E 是 n 阶单位矩阵，$\alpha_1\in\mathbf{F}^n$ 是 A 的属于特征值 λ 的一个特征向量，向量组 $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_s$ 按如下方式产生：$(A-\lambda E)\alpha_{i+1}=\alpha_i(i=1,\ 2,\ \ldots,\ s-1)$. 证明向量组 $\{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_s\}$ 线性无关.

九、（20 分）判断下列命题的真伪，若它是真命题，请给出简单的证明；若它是伪命题，给出理由或举反例将它否定.

(1) 设 n 阶方阵 A 满足 $A^2-5A+5E_n=0$，则对所有的有理数 r，$A+rE_n$ 都是可逆阵；

(2) 在 5 维欧氏空间 V 中，存在两组线性无关向量 $S_1=\{v_1,\ v_2,\ v_3\}$ 和 $S_2=\{w_1,\ w_2,\ w_3\}$，使其满足内积 $(v_i,\ w_j)=0\ (1\le i,\ j\le 3)$；

(3) 不存在 2 阶方阵 A 使得 $r(A)+r(A^*)=3$，其中 A^* 是 A 的伴随矩阵；

(4) 设 n 阶方阵 A 的每一行元素之和是 10，则 $2A^3+A+9E_n$ 的每一行元素之和是 2019.