2019-2020 学年线性代数 I（H）期末

任课老师：统一命卷　　　　考试时长：120 分钟

一、（10 分）设 $D=|a_{ij}|=\begin{vmatrix}3&6&9&12\\2&4&6&8\\1&2&0&3\\5&6&4&3\end{vmatrix}$，求 $A_{41}+2A_{42}+3A_{44}$，这里 A_{ij} 是元素 a_{ij} 的代数余子式.

二、（10 分）设 $A\in M_{m\times s}(\mathbf{R})$，且 $r(A)=r$，证明：存在矩阵 $B\in M_{s\times n}(\mathbf{R})$，且 $r(B)=\min\{s-r,\ n\}$，使得 $AB=0$.

三、（10 分）设 α 为 $\mathbf{R}^3$ 中的非零向量，$\sigma(x)=(x,\ \alpha)\alpha$，这里 $(\cdot\ ,\ \cdot)$ 是 $\mathbf{R}^3$ 的标准内积.

(1) 证明：σ 为 $\mathbf{R}^3$ 上的线性变换，并求其像空间；

(2) 设 $\alpha=(1,\ 0,\ -2)$，分别求 σ 在基 $\mathbf{B}_1=\{(1,\ 0,\ 0),\ (0,\ 1,\ 0),\ (0,\ 0,\ 1)\}$ 和 $\mathbf{B}_2=\{(1,\ 1,\ 1),\ (1,\ 1,\ 0),\ (1,\ 0,\ 0)\}$ 下的矩阵.

四、（10 分）

(1) 设 A 为 n 阶矩阵且 $E-A$ 可逆，证明：A 与 $(E-A)^{-1}$ 相乘可交换；

(2) 设 A 为 n 阶实反对称矩阵且 $E+A$ 可逆，证明：$(E-A)(E+A)^{-1}$ 为正交矩阵，且 -1 不为其特征值.

五、（10 分）已知 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$ 是齐次线性方程组 $AX=\mathbf{0}$ 的一组基础解系，向量组

$$\beta_1=t_1\alpha_1+t_2\alpha_2,\ \beta_2=t_1\alpha_2+t_2\alpha_3,\ \ldots,\ \beta_{s-1}=t_1\alpha_{s-1}+t_2\alpha_s$$

试问当实数 t_1,t_2 满足何条件时，$AX=\mathbf{0}$ 有基础解系包含向量 $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_{s-1}$，并写出该基础解系中的其余向量.

六、（15 分）已知二次型 $X^{\mathrm{T}}AX=ax_1^2+ax_2^2+ax_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$ 的秩为 2.

(1) 求实数 a 的值；

(2) 用正交变换 $X=QY$ 将 $X^{\mathrm{T}}AX$ 化为标准形，给出 Q，并求二次型的正、负惯性指数.

七、（15 分）记 $X=\left\{\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\in M_{3\times3}(\mathrm{R})\,\middle|\,\sum\limits_{j=1}^{3}a_{1j}=\sum\limits_{j=1}^{3}a_{2j}=\sum\limits_{j=1}^{3}a_{3j}=\sum\limits_{j=1}^{3}a_{jj}\right\}$，证明：

(1) X 是 $M_{3\times3}(\mathrm{R})$ 的一个子空间，并求该子空间的维数；

(2) 对任意可逆矩阵 $A\in X$，$(1,\ 1,\ 1)^{\mathrm{T}}$ 是 A 和 A^{-1} 的特征向量；

(3) 对任意可逆矩阵 $A\in X$，$A^{-1}\in X$.

八、(20 分) 判断下列命题的真伪，若它是真命题，请给出简单的证明；若它是伪命题，给出理由或举反例将它否定.

(1) 设 A_1，A_2，…，A_{n+1} 是任意 $n+1$ 个 n 阶矩阵，必存在不全为 0 的实数 λ_1，λ_2，…，λ_{n+1}，使得矩阵 $\lambda_1A_1+\lambda_2A_2+\cdots+\lambda_{n+1}A_{n+1}$ 不可逆；

(2) 复数集 $\mathbf{C}$ 关于复数的加法与复数的乘法构成的复数域上的线性空间与 $\mathbf{C}^2$ 同构；

(3) 设 $x\in\mathbf{R}^n$，对任意 $\lambda\in\mathbf{R}$，$E+\lambda xx^{\mathrm{T}}$ 为正定矩阵；

(4) 若 A, B 为 n 阶上三角矩阵，且对角线上元素都相同，则 A 与 B 相似.