2020-2021 学年线性代数 I（H）小测 2

任课老师：谈之奕　　　　考试时长：90 分钟

一、（10 分）称实矩阵 $A=(a_{ij})$ 是整数矩阵，如果每个 a_{ij} 都是整数. 设 M 是整数矩阵，且可逆（作为实矩阵）. 证明：M 的逆矩阵也是整数矩阵的充要条件是 M 的行列式等于 ± 1.

二、（15 分）设 $B=\{v_1,v_2,v_3\}$ 是线性空间 V 的一组基，线性映射 $\sigma: V\to V$ 定义如下：

$$\sigma(v_1)=v_2+v_3,\sigma(v_2)=v_3,\sigma(v_3)=v_1-v_2.$$

(1) 求 σ 在基 B 下的矩阵；

(2) 证明：$B'=\{v_2,v_3+v_1,v_1-v_2\}$ 是 V 的另一组基；

(3) 求 σ 在基 B' 下的矩阵.

三、（15 分）设

$$P=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\ Q=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},$$

定义 $\mathbf{R}^{3\times 2}$ 上映射 σ：

$$\sigma(A)=PAQ.$$

(1) 验证 σ 是线性映射；

(2) 求 $\operatorname{im}\sigma$ 和 $\ker\sigma$；

(3) 验证关于 σ 的维数公式.

四、（15 分）求参数 a, b 的值，使得 $\begin{vmatrix}1&1&1\\x&y&z\\u&v&w\end{vmatrix}=1,\begin{vmatrix}1&2&-5\\x&y&z\\u&v&w\end{vmatrix}=2,\begin{vmatrix}2&3&b\\x&y&z\\u&v&w\end{vmatrix}=a$ 都成立，并求 $\begin{vmatrix}x&y&z\\1&-1&5\\u&v&w\end{vmatrix}$.

五、（15 分）设在 $\mathbf{F}[x]_3$ 中有两组基：

$$(A)\alpha_1=1-x,\alpha_2=-x+x^2,\alpha_3=3x-2x^2;$$

$$(B)\beta_1=4x+5x^2,\beta_2=-1,\beta_3=3x+4x^2.$$

(1) 求基 (A) 到基 (B) 的过渡矩阵；

(2) 设 α 在基 (A) 下的坐标为 $(1,1,-1)^{\mathrm{T}}$，求 α 在基 (B) 下的坐标.

六、（10 分）设 $A\in M_{m\times n}(\mathbf{F})$，$r(A)=r$，$k$ 是满足条件 $r\leq k\leq n$ 的任意整数，证明存在 n 阶方阵 B，使得 $AB=0$，且 $r(A)+r(B)=k$.

七、（20 分）判断下列命题的真伪，若它是真命题，请给出简单的证明；若它是伪命题，给出理由或举反例将它否定.

(1) 域 $\mathbf{F}$ 上的全体 n 阶可逆矩阵构成 $M_n(\mathbf{F})$ 的一个子空间；

(2) 设 A 和 B 都是可逆矩阵，则矩阵 $\begin{pmatrix} O & B \\ A & C \end{pmatrix}$ 也是可逆矩阵；

(3) 可逆矩阵 A 的伴随矩阵 A^* 的行列式等于 1；

(4) 若对于任何正整数 n，方阵 A（阶数大于 1）的 n 次乘积 A^n 都是非零方阵，则 A 可逆.