2020-2021 学年线性代数 I（H）期中

任课老师：吴志祥　　　　考试时长：120 分钟

一、（10 分）设方程组：

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 7x_4 = 0 \\ ax_1 + 3x_2 - 4x_3 + 6x_4 = 0 \end{cases}$$

的解空间为 V_1，方程组：

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + bx_4 = 0 \\ 5x_1 + 7x_2 - 9x_3 + 13x_4 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

的解空间为 V_2 ，问 a, b 为何值时，$\mathbf{R}^4 = V_1 \oplus V_2$.

二、（10 分）设 $V = \{(a_{ij})_{n\times n} \mid \forall i,\ j,\ a_{ij} = a_{ji}\}$

(1) 证明：V 为 $F^{n\times n}$ 的子空间；

(2) 求 V 的基和维数.

三、（10 分）设 $f_1 = -1 + x,\ f_2 = 1 - x^2,\ f_3 = 1 - x^3,\ g_1 = x - x^2,\ g_2 = x + x^3,\ V_1 = L(f_1,\ f_2,\ f_3)$，$V_2 = L(g_1,\ g_2)$，求：

(1) $V_1 + V_2$ 的基和维数；

(2) $V_1 \cap V_2$ 的基和维数；

(3) V_2 在 $\mathbf{R}[x]_4$ 空间的补.

四、（10 分）设 $\epsilon_1,\ \epsilon_2$ 为 n 维欧氏空间 V 的两个单位正交向量，定义

$$\sigma(\alpha) = \alpha - 2(\alpha, \epsilon_1)\epsilon_1 - 2(\alpha, \epsilon_2)\epsilon_2$$

证明：

(1) σ 是 V 上的线性变换；

(2) $\forall \alpha,\ \beta \in V,\ (\sigma(\alpha), \sigma(\beta)) = (\alpha, \beta)$.

五、（10 分）已知 n 阶矩阵 A 的秩为 1 ，证明：$A^k = \mathrm{tr}(A)^{k-1}A$.（注：tr 为矩阵的迹，即矩阵的对角线元素之和）

六、（10 分）已知矩阵 $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ h & x & y \end{pmatrix}$ 的逆是 $A^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}$，且已知矩阵 $B=\begin{pmatrix} a-2b & b-3c & -c \\ d-2e & e-3f & -f \\ h-2x & x-3y & -y \end{pmatrix}$. 求矩阵 X 满足：

$$X+(B(A^{\mathrm{T}}B^2)^{-1}A^{\mathrm{T}})^{-1}=X(A^2(B^{\mathrm{T}}A)^{-1}B^{\mathrm{T}})^{-1}(A+B).$$

七、（10 分）设 $V(\mathbf{F})$ 是一个 n 维线性空间，$\sigma\in L(V,V)$，证明：

(1) 在 $\mathbf{F}[x]$ 中有一个次数不高于 n^2 的多项式 $p(x)$ 使 $p(\sigma)=0$；

(2) σ 可逆 $\iff$ 有一常数项不为 0 的多项式 $p(x)$ 使 $p(\sigma)=0$.

八、（10 分）已知三维线性空间 V 的线性变换 σ 关于基 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ 所对应的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) 求 σ 在基 $\{\beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3\}$ 下对应的矩阵 B，其中：

$$\beta_1=2\alpha_1+\alpha_2+3\alpha_3,\ \beta_2=\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3,\ \beta_3=-\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$$

(2) 求 σ 的值域 $\sigma(V)$ 和核 $\ker\sigma$；

(3) 把 $\sigma(V)$ 的基扩充为 V 的基，并求 σ 在这组基下对应的矩阵；

(4) 把 $\ker\sigma$ 的基扩充为 V 的基，并求 σ 在这组基下对应的矩阵.

九、（20 分）判断下列命题的真伪，若它是真命题，请给出简单的证明；若它是伪命题，给出理由或举反例将它否定.

(1) 若 α_1，α_2，α_3 线性相关，则 $\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_2+\alpha_3$，$\alpha_3+\alpha_1$ 也线性相关；

(2) 一个有限维线性空间只包含有限个子空间；

(3) 已知 $\sigma\in L(V,\ V)$，$\dim V=n$，则由 $r(\sigma)+\dim(\ker\sigma)=n$ 可得 $\mathrm{Im}\sigma+\ker\sigma=V$；

(4) 若对于任何正整数 n，方阵 A（阶数大于 1）的 n 次乘积 A^n 都是非零方阵，则 A 是可逆的.