2021-2022 学年线性代数 I（H）期末

任课老师：统一命卷　　　　考试时长：120 分钟

一、（12 分）定义实数域上的线性空间 $\mathbf{R}^n$ 到自身的映射 T 如下：

$$\forall X=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbf{R}^n,\ T(X)=(x_1-x_2,x_2-x_3,\dots,x_{n-1}-x_n,x_n-x_1).$$

(1) 验证 $T\in\mathcal{L}(\mathbf{R}^n)$；

(2) 求 T 的像空间，和 T 核空间的维数.

二、（12 分）设

$$A=\begin{pmatrix}1&1&-1&-1\\2&2&1&0\\3&3&0&-1\\1&1&2&0\end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}.$$

求线性方程组 $AX=b$ 的一般解.

三、（12 分）设三元二次齐次实多项式如下：

$$f(x,y,z)=x^2+2xy+y^2-6yz-4xz.$$

(1) 求实对称矩阵 A，使得 $f(x,y,z)=\begin{pmatrix}x&y&z\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}x&y&z\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$；

(2) 求一个与 A 合同的对角矩阵；

(3) 求 $f(x,y,z)$ 的正惯性指数和负惯性指数.

四、（12 分）设 $V=\mathbf{R}^{4\times1}$，$W=\mathbf{R}^{3\times1}$，定义映射 $T:V\to W$ 如下：

$$T(X)=AX=\begin{pmatrix}1&-1&0&1\\1&1&2&3\\2&2&3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix},\ \forall X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\in V.$$

(1) 证明 T 的秩为 3；

(2) 求 V 和 $\operatorname{im}T$ 的基 $\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4\}$ 和 $\{\eta_1,\eta_2\}$，使得

$$T(\varepsilon_1)=\eta_1,T(\varepsilon_2)=\eta_2,T(\varepsilon_3)=T(\varepsilon_4)=(0,0,0)^{\mathrm{T}}.$$

五、（12 分）设 $V=\mathbb{R}^{2\times2}$ 是按矩阵加法和数乘构成的实数域上的线性空间.

(1) 验证下列向量组构成 V 的一组基：

$$B=\left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}\right\};$$

(2) 在 V 上定义运算

$$\sigma\left((a_{ij})_{2\times 2},(b_{ij})_{2\times 2}\right)=a_{11}b_{11}+a_{12}b_{12}+a_{21}b_{21}+a_{22}b_{22}.$$

验证 σ 是 V 上一个内积，使得 V 成为一个欧氏空间；

(3) 将 Schmidt 正交化过程用于 B 求出 V 的一组单位正交基.

六、（8 分）求矩阵

$$A=\begin{bmatrix}0&-1&1\\-1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}$$

的所有特征值，对应的特征子空间，以及与 A 相似的一个对角矩阵.

七、（16 分）设 $V=\mathbb{R}^3$ 是具有自然内积的欧氏空间，$T\in L(V)$. 设

$$\alpha_1=(1,2,0),\ \alpha_2=(0,1,2),\ \alpha_3=(2,0,1);$$

$$T(\alpha_1)=-(1,0,2),\ T(\alpha_2)=-(2,1,0),\ T(\alpha_3)=-(0,2,1).$$

(1) 求 T 关于 V 的自然基的矩阵；

(2) 证明 T 是一个正交变换；

(3) 证明 T 是一个镜面反射变换.（存在 V 的单位正交基 $\{\eta,\ \beta,\ \gamma\}$ 使得 $T(\eta)=-\eta$, $T(\beta)=\beta$, $T(\gamma)=\gamma$，或等价地，存在单位向量 η 使得 $T(\alpha)=\alpha-2(\alpha,\ \eta)\eta,\ \forall\alpha\in V$）

八、（16 分）判断下列命题的真伪，若它是真命题，请给出简单的证明；若它是伪命题，给出理由或举反例将它否定.

(1) 设 A 是实数域上 $m\times n$ 阶矩阵，则矩阵秩 $r\left(A^TA\right)=r(A)$；

(2) 设 A 是复数域上 $m\times n$ 阶矩阵，则矩阵秩 $r\left(A^TA\right)=r(A)$；

(3) 设 V,W 是数域 F 上的线性空间，则 $V\cup W$ 是线性空间；

(4) 实矩阵的下列性质有其二必有其三：

i. $A^T=A$;

ii. $A^TA=E$（单位矩阵）;

iii. $A^2=E$.