2021-2022 学年线性代数 I（H）小测

任课老师：刘康生　　　　考试时长：90 分钟

一、 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} a & -1 & 1 \\ -1 & a & -1 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix}$，$\beta=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. 假设线性方程组 $Ax=\beta$ 有解但解不唯一.

(1) 求 a 的值；

(2) 给出 $Ax=\beta$ 的一般解.

二、 设

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ Q=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

定义 $\mathbf{R}^{3\times 2}$ 上映射 σ：

$$\sigma(A)=PAQ.$$

(1) 验证 σ 是线性映射；

(2) 求 $\operatorname{im}\sigma$ 和 $\ker\sigma$；

(3) 验证关于 σ 的维数公式.

三、 设 B 是 3×1 矩阵，C 是 1×3 矩阵，证明：$r(BC)\leqslant 1$；反之，若 A 是秩为 1 的 3×3 矩阵，证明：存在 3×1 矩阵 B 和 1×3 矩阵 C，使得 $A=BC$.

四、 设 $B=\{\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n\}$ 是实数域 $\mathbf{R}$ 上线性空间 V 的一组基，$T\in\mathcal{L}(V)$，$T(\beta_1)=\beta_2$，$T(\beta_2)=\beta_3$，$\cdots$，$T(\beta_{n-1})=\beta_n$，$T(\beta_n)=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\beta_i(a_i\in\mathbf{R})$. 求 T 在 B 下的表示矩阵. 在什么条件下 T 是同构映射?

五、 设 A^* 是 n 阶方阵 A 的伴随矩阵，求 A^* 的秩.

六、 判断下列命题的真伪，若它是真命题，请给出简单的证明；若它是伪命题，给出理由或举反例将它否定.

(1) 给定线性空间 V 的非零向量 v 和线性空间 W 的向量 w，总存在线性映射 $T:V\to W$，使得 $T(v)=w$；

(2) 若线性方程组有 m 个方程，n 个变量，且 $m<n$，则这个方程组一定有非零解；

(3) 若方阵 $A^3=0$，则 $E+A$ 和 $E-A$ 都是可逆矩阵；

(4) 若方阵 $A^2=A$，则 $E+A$ 和 $E-A$ 都是可逆矩阵.