浙江大学 2021－2022 学年秋冬学期

《线性代数Ⅰ（H）》课程期中考试试卷

开课学院：数学科学学院，考试形式：闭卷

考试时间：2021 年 11 月 12 日，所需时间：100 分钟

考生姓名：__________ 学号：__________ 专业：__________

题序	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总 分
得分										
评卷人										

一、（10 分）$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&1\\2&1&-a\\1&-2&-3\end{bmatrix},\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix},\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}3\\9\\-6\end{bmatrix},\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$无解，求$a$.

考察知识点：线性方程组求解

二、（10 分）证明替换定理：设向量组$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\}$线性无关，$\boldsymbol{\beta}=b_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+b_s\boldsymbol{\alpha}_s$. 如果$b_i\neq 0$，那么用$\boldsymbol{\beta}$替换$\boldsymbol{\alpha}_i$以后得到的向量组$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i-1},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_{i+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\}$也线性无关。

考察知识点：线性相关性

三、（10 分）设$\{\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4,\boldsymbol{\varepsilon}_5\}$是欧氏空间$V$的一组标准正交基，$W=L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，其中$\boldsymbol{\alpha}_1=2\boldsymbol{\varepsilon}_1+\boldsymbol{\varepsilon}_2+\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\varepsilon}_1+\boldsymbol{\varepsilon}_2+\boldsymbol{\varepsilon}_5,\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\varepsilon}_1-\boldsymbol{\varepsilon}_2+\boldsymbol{\varepsilon}_4$。

（1）求$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$之间的夹角；

（2）求W的一组单位正交基。

考察知识点：内积空间，向量的长度，施密特正交化，单位正交基

作业题改编

四、（10 分）如果向量组$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m\}$的秩为$r$，那么该向量组中任意$s$个向量组成的子集的秩大于或等于$r+s-m$.

考察知识点：向量组的秩，秩（A）+秩（B）大于等于秩（A 并 B）

老师上课内容

五、（10 分）在$\mathbb{R}^3$中取三个向量：

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-2,0),\boldsymbol{\alpha}_2=(-3,0,-2),\boldsymbol{\alpha}_3=(2,4,3),$$

设σ是满足$\sigma(\boldsymbol{\alpha}_i)=\boldsymbol{e}_i(i=1,2,3)$的线性变换，其中$\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$是$\mathbb{R}^3$的自然基。

（1）求σ关于自然基所对应的矩阵。

（2）求向量$\boldsymbol{\alpha}_1=(-2,5,6)$在$\sigma$下的象。

考察知识点：线性映射的矩阵表示，向量的坐标，线性映射的像

作业题改编

六、（10 分）已知$\mathbb{R}[x]_n$的线性变换$\sigma\big(p(x)\big)=p(x+1)-p(x),p(x)\epsilon\mathbb{R}[x]_n$。

（1）求σ的秩和$Ker\sigma$；

（2）求所有可能的$p(x)\epsilon\mathbb{R}[x]_n$和$\lambda\epsilon\mathbb{R}$满足$\sigma\big(p(x)\big)=\lambda p(x)$。

考察知识点：线性空间的维数，线性映射的像和核

作业题改编

七、（10 分）设$B=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4\}$是4维向量空间$V$的一组基，$\sigma$关于基$B$所对应的矩阵为$A$，求$Im\sigma$和$Ker\sigma$：

$$A=\begin{bmatrix}1&0&2&1\\-1&2&1&3\\1&2&5&5\\2&-2&1&-2\end{bmatrix}.$$

考察知识点：线性映射的矩阵表示，线性映射的像和核

作业题改编

八、（10 分）域F上所有$m\times n$矩阵组成的集合$M_{m\times n}(F)$是域F上的一个线性空间。令$V_i=\{Ae_{ii}|A\in M_{m\times n}(F)\}$，其中$e_{ij}$表示第$i$行，第$j$列元素为1，其余元素为0的$n$阶矩阵，$i=1,2,\cdots,n$。证明：

（1）V_i是$M_{m\times n}(F)$的子空间，；

（2）$M_{m\times n}(F)=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_n$.

考察知识点：矩阵的加法、数乘和乘法，线性子空间，子空间的直和

九、（20 分）判断下列叙述是否正确，若正确，请给出详细严谨的证明；若错误，请具体说明理由或举出反例。

（1）正实数集$\mathbb{R}^+$对如下定义的加法和数量乘法构成整数$\mathbb{Z}$上的线性空间：

$$a\oplus b=ab,\lambda\circ a=a^{\lambda},\forall a,b\in\mathbb{R}^+,\lambda\epsilon\mathbb{Z}.$$

（2）设σ是$V(F)$到自身的一个映射，$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$是$V(F)$的一组基，则$\sigma$可逆当且仅当$\{\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1),\cdots,\sigma(\boldsymbol{\alpha}_n)\}$是$V(F)$的一组基。

（3）对于任意实数域$\mathbb{R}$上的线性空间V，都能找到有限个V的非平凡子空间$V_1,\cdots,V_m$，使得$V_1\cup V_2\cup\cdots\cup V_m=V$。

（4）与所有n阶矩阵可交换的矩阵一定是n阶数量矩阵。

考察知识点：域的概念，线性空间概念；线性映射概念；子空间；矩阵乘法

课后题改编+上课内容；作业题相关；书上习题；书上习题。

参考答案：

一、解：$\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&3\\2&1&-a&9\\1&-2&-3&-6\end{array}\right]\xrightarrow{\text{初等行变换}}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&3\\0&1&a+2&-3\\0&0&3a+2&-18\end{array}\right]$

∴ 当 $3a+2=0$ 即 $a=-\frac{2}{3}$ 时，$Ax=b$ 无解；

当 $3a+2\neq0$ 即 $a\neq-\frac{2}{3}$ 时，$Ax=b$ 有唯一解.

∴ $a=-\frac{2}{3}$.

二. 证明: 假设 $k_1\alpha_1+\cdots+k_{i-1}\alpha_{i-1}+k_i\beta+k_{i+1}\alpha_{i+1}+\cdots+k_s\alpha_s=0$ ①

代入 $\beta=b_1\alpha_1+\cdots+b_s\alpha_s$ 后, 整理得:

$$(k_1+k_ib_1)\alpha_1+\cdots+(k_{i-1}+k_ib_{i-1})\alpha_{i-1}+k_ib_i\alpha_i+(k_{i+1}+k_ib_{i+1})\alpha_{i+1}+$$

$$(k_s+k_ib_s)\alpha_s=0.$$

由 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_s\}$ 线性无关得:

$$k_1+k_ib_1=\cdots=k_{i-1}+k_ib_{i-1}=k_ib_i=k_{i+1}+k_ib_{i+1}=\cdots=k_s+k_ib_s=0$$

$\because b_i\neq0$ $\therefore$ 由 $k_ib_i=0$ 可得 $k_i=0$, 进一步有 $k_1=\cdots=k_{i-1}=k_{i+1}=\cdots=k_s=0$.

于是 等式① 成立当且仅当 全部的 k_j, $j=1,2,\cdots,s$ 等于 0.

故 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_{i-1},\beta,\alpha_{i+1},\cdots,\alpha_s\}$ 线性无关.

三、解：(1) 由题：$(\alpha_1,\alpha_1)=6$，$(\alpha_1,\alpha_2)=3$，$(\alpha_2,\alpha_2)=3$.

故 $\cos\langle\alpha_1,\alpha_2\rangle=\frac{3}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 由 $\langle\alpha_1,\alpha_2\rangle\in[0,\pi]$ 知，$\langle\alpha_1,\alpha_2\rangle=\frac{\pi}{4}$.

(2) 若 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$，代入整理得

$$(2k_1+k_2+k_3)\varepsilon_1+(k_1+k_2-k_3)\varepsilon_2+k_1\varepsilon_3+k_3\varepsilon_4+k_2\varepsilon_5=0.$$

由 $\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4,\varepsilon_5\}$ 为V的一组基，知该向量组线性无关，

故 $k_1=k_2=k_3=0$，从而得 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ 线性无关，可作为W的一组基.

对 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ 进行施密特正交化：

$\beta_1=\alpha_1=2\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3$，$(\beta_1,\beta_1)=6$，$(\alpha_2,\beta_1)=3$，$(\alpha_3,\beta_1)=1$

$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=\frac{1}{2}\varepsilon_2-\frac{1}{2}\varepsilon_3+\varepsilon_5$，$(\beta_2,\beta_2)=\frac{3}{2}$，$(\alpha_3,\beta_2)=-\frac{1}{2}$

$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2=\frac{2}{3}\varepsilon_1-\varepsilon_2-\frac{1}{3}\varepsilon_3+\varepsilon_4+\frac{1}{3}\varepsilon_5$，$(\beta_3,\beta_3)=\frac{8}{3}$

对 $\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$ 进行单位化：

$$\eta_1=\frac{\beta_1}{|\beta_1|}=\frac{\sqrt{6}}{3}\varepsilon_1+\frac{\sqrt{6}}{6}\varepsilon_2+\frac{\sqrt{6}}{6}\varepsilon_3,$$

$$\eta_2=\frac{\beta_2}{|\beta_2|}=\frac{\sqrt{6}}{6}\varepsilon_2-\frac{\sqrt{6}}{6}\varepsilon_3+\frac{\sqrt{6}}{3}\varepsilon_5,$$

$$\eta_3=\frac{\beta_3}{|\beta_3|}=\frac{\sqrt{6}}{6}\varepsilon_1-\frac{\sqrt{6}}{4}\varepsilon_2-\frac{\sqrt{6}}{12}\varepsilon_3+\frac{\sqrt{6}}{4}\varepsilon_4+\frac{\sqrt{6}}{12}\varepsilon_5.$$

则 $\{\eta_1,\eta_2,\eta_3\}$ 为W的一组标准正交基.

四. 证明：任取一个由 s 个向量组成的子集，不妨设其为 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s\}$.
记该向量组的秩为 l，取它的一个极大线性无关组，记作
$\{\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_l}\}$，将其扩充为原向量组的一个极大线性无关组 $\{\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_l}, \alpha_{i_{l+1}}, \cdots, \alpha_{i_r}\}$，则 $\alpha_{i_{l+1}}, \cdots, \alpha_{i_r}$ 取自于剩余的 $m-s$ 个向量中，故它们的数目 $r-l \le m-s$，
从而有 $l \ge r+s-m$. 即证。

五. 解：(1)
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 & -\frac{5}{2} & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -\frac{3}{2} & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$\therefore \sigma(e_1) = (-4, -3, -2)$，$\sigma(e_2) = (-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}, -1)$，
$\sigma(e_3) = (6, 4, 3)$，
$\therefore \sigma$ 关于自然基所对应的矩阵为
$$\begin{bmatrix} -4 & -\frac{5}{2} & 6 \\ -3 & -\frac{3}{2} & 4 \\ -2 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

(2) $\sigma(\alpha_1) = -2\sigma(e_1) + 5\sigma(e_2) + 6\sigma(e_3) = (\frac{63}{2}, \frac{45}{2}, 17)$

2. 解：(1) ① 取 $\mathbb{R}[x]_n$ 的一组基 $\{1, x, x^2, \cdots, x^{n-1}\}$,

则有 $\sigma(1)=0$，$\sigma(x)=1$，$\sigma(x^2)=1+2x$，$\cdots$，

$\sigma(x^{n-1})=(x+1)^{n-1}-x^{n-1}=C_{n-1}^0+C_{n-1}^1x+\cdots+C_{n-1}^{n-2}x^{n-2}$.

故 $\mathrm{Im}\sigma=L(1, 1+2x, \cdots, C_{n-1}^0+C_{n-1}^1x+\cdots+C_{n-1}^{n-2}x^{n-2})$.

若 $k_1\cdot 1+k_2(1+2x)+\cdots+k_{n-1}(C_{n-1}^0+C_{n-1}^1x+\cdots+C_{n-1}^{n-2}x^{n-2})=0$,

对照等式两边 x^{n-2} 的系数可得 $k_{n-1}=0$，代入 k_{n-1} 再对照两边 x^{n-3} 的系数可得 $k_{n-2}=0$，依次下去，最终得 $k_1=k_2=\cdots=k_{n-1}=0$.

故 $\{1, 1+2x, \cdots, C_{n-1}^0+C_{n-1}^1x+\cdots+C_{n-1}^{n-2}x^{n-2}\}$ 线性无关，是 $\mathrm{Im}\sigma$ 的一组基. 于是 秩$(\sigma)=\dim(\mathrm{Im}\sigma)=n-1$.

② 而由上述分析，$1\in\mathrm{Ker}\sigma$，$\dim(\mathrm{Ker}\sigma)=\dim(\mathbb{R}[x]_n)-$

$\dim(\mathrm{Im}\sigma)=1$，故 $\mathrm{Ker}\sigma=L(1)=\mathbb{R}$.

(2) ① 若 $p(x)=0$，则对全部的 $\lambda\in\mathbb{R}$，都有 $\sigma(p(x))=\lambda p(x)$.

② 若 $p(x)\neq0$，设 $p(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_mx^m$，其中 $m\leq n-1$，$a_m\neq0$.

$\sigma(p(x))=\lambda p(x)\Leftrightarrow p(x+1)=\lambda p(x)$. 若等式成立，对照等式两边 x^m 的系数，可得 $a_m=\lambda a_m$. $\because a_m\neq0$ $\therefore\lambda=1$，代入等式有：

$p(x+1)=p(x)\Leftrightarrow p(x)\in\mathrm{Ker}\sigma$. 结合(1)知，$p(x)=a_0$，$a_0\neq0$.

综上所述：满足等式的所有 $p(x)$ 和 λ 有以下两种类型：

① $p(x)=0$，对全部的 $\lambda\in\mathbb{R}$，都有 $\sigma(p(x))=\lambda p(x)$;

② $p(x)=a\in\mathbb{R}$，$a\neq0$，当 $\lambda=0$ 时，有 $\sigma(p(x))=\lambda p(x)$.

t. 解：① $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 5 \\ 2 & -2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

由题：$(\sigma(\alpha_1), \sigma(\alpha_2), \sigma(\alpha_3), \sigma(\alpha_4)) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)A$，

结合上述变换可知，$\{\sigma(\alpha_1), \sigma(\alpha_2)\}$ 为 $Im\sigma$ 的一组基，

即 $Im\sigma = L(\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4,\ 2\alpha_2 + 2\alpha_3 - 2\alpha_4)$.

② 对于 $\alpha = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 + x_4\alpha_4 \in Ker\sigma$，

$\sigma(\alpha) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = 0$

$\Longleftrightarrow$ $A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = 0$. 解方程组得：$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$

$= t_1 \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$,

其中 $t_1, t_2 \in F$.

$\therefore Ker\sigma = L(4\alpha_1 + 3\alpha_2 - 2\alpha_3,\ \alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_4)$.

八、证明：(1) $V_i=\{Ae_{ii} \mid A\in M_{m\times n}(F)\}$ 显然为 $M_{m\times n}(F)$ 的非空子集，下证 V_i 关于 $M_{m\times n}(F)$ 的加法和数乘封闭.

任取 V_i 中两矩阵，记为 Ae_{ii}, Be_{ii}，其中 $A,B\in M_{m\times n}(F)$，对任意的 $\lambda,\mu\in F$，有 $\lambda(Ae_{ii})+\mu(Be_{ii}) = (\lambda A)e_{ii}+(\mu B)e_{ii}$

$= (\lambda A+\mu B)e_{ii} \in V_i$. 即证.

(2) 由(1)知 $V_1+V_2+\cdots+V_n \subseteq M_{m\times n}(F)$.

任取 $A\in M_{m\times n}(F)$，记 $A=(a_{ij})_{m\times n}$, $a_{ij}\in F$.

则 $$Ae_{ii}=\begin{array}{c}\begin{bmatrix} 0\cdots0 & a_{1i} & 0\cdots0 \\ 0\cdots0 & a_{2i} & 0\cdots0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0\cdots0 & a_{mi} & 0\cdots0 \end{bmatrix} \\ \text{第}i\text{列}\end{array}.$$

故 $A=Ae_{11}+Ae_{22}+\cdots+Ae_{nn}\in V_1+V_2+\cdots+V_n$,

从而 $M_{m\times n}(F)=V_1+V_2+\cdots+V_n$.

由上分析，

$$V_i=\left\{\begin{array}{c}\begin{bmatrix} 0\cdots0 & a_1 & 0\cdots0 \\ 0\cdots0 & a_2 & 0\cdots0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0\cdots0 & a_m & 0\cdots0 \end{bmatrix} \\ \text{第}i\text{列}\end{array} \;\middle|\; a_1,a_2,\cdots,a_m\in F\right\}.$$

故当 $i\neq j$ 时，$V_i\cap V_j=\{O_{m\times n}\}$，其中 $O_{m\times n}$ 为 $m\times n$ 零矩阵.

$\therefore\ M_{m\times n}(F)=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_n$.

九、解：(1) 错误。整数集不构成域，如非零元2在$\mathbb{Z}$中无乘法逆元。

(2) 错误．如非线性映射 $\sigma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\sigma(x)=\begin{cases} 1, & x=1 \\ 0, & x\neq 1 \end{cases}$，$\sigma$ 把 $\mathbb{R}$的一组基映成$\mathbb{R}$的一组基，但σ不可逆。

(3) 错误．如一维空间 $\mathbb{R}$，无非平凡子空间．

(或如二维空间$\mathbb{R}^2$，其非平凡子空间为过原点的一条直线，而平面无法由有限条直线覆盖)．

(4) 正确．证明：设矩阵$A=\{a_{ij}\}$可与所有n阶矩阵交换．

则A一定为n阶矩阵．

取$B=\mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$，其中$\lambda_i \neq \lambda_j\ (i\neq j)$．

AB的第i行第j列元素为 $\lambda_j a_{ij}$，BA的第i行第j列元素为$\lambda_i a_{ij}$．$(i,j=1,2,\cdots,n)$．

由$AB=BA$，有 $\lambda_j a_{ij}=\lambda_i a_{ij}$，当$i\neq j$时，由$\lambda_i\neq\lambda_j$得 $a_{ij}=0$．

故$A=\mathrm{diag}\{a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}\}$．

取初等对换矩阵 $E_{1k}\ (k\neq 1)=$ $\begin{array}{cl} \begin{bmatrix} 0 & \ddots & 1 & & \\ 1 & & 0 & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} 1行 \\ k行 \\ \ \end{array} \end{array}$．

$$AE_{1k}=\begin{bmatrix} 0 & & a_{11} & & \\ & \ddots & & & \\ a_{kk} & & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad E_{1k}A=\begin{bmatrix} 0 & & a_{kk} & & \\ & \ddots & & & \\ a_{11} & & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

由$AE_{1k}=E_{1k}A$有：$a_{11}=a_{kk}\ (k\neq 1)$．

故$A=a_{11}E$为n阶数量矩阵．