2022-2023 学年线性代数 I（H）期末

任课老师：统一命卷　　　　　考试时长：120 分钟

一、（10 分）求线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + kx_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ kx_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$$

在 k 为多少时有解，并求出一般解.

二、（10 分）给定二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3$，请将其化为标准型，并求出此时的线性变换矩阵，以及该二次型的正、负惯性指数.

三、（10 分）已知三阶矩阵 A 的伴随矩阵 $A^* = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$，求 A.

四、（10 分）设 $A \in \mathbf{R}^{p\times m}, B \in \mathbf{R}^{m\times n}, r(A) = r, r(B) = s, r(AB) = t$. 令 $V = \{X \in \mathbf{R}^n \mid ABX = 0\}, W = \{Y \in \mathbf{R}^m \mid Y = BX, X \in V\}$.

（1）证明 V 是 $\mathbf{R}^n$ 上的子空间，W 是 $\mathbf{R}^m$ 上的子空间.

（2）求 $\dim V, \dim W$.

五、（10 分）设三阶矩阵 A，满足 $|A - E| = |A - 2E| = |A + E| = 0$.

（1）求 A 的所有特征值.

（2）求 $|A + 3E|$.

六、（15 分）

（1）设 A 为 n 阶矩阵，满足 $r(A) = r$，证明：存在可逆的矩阵 P，使得 $P^{-1}AP$ 的后 $n - r$ 列均为 0.

（2）设 A 为 n 阶矩阵，满足 $r(A) = 1$，A 主对角线上元素之和为 1，证明：$A^2 = A$.

七、（15 分）定义 $\mathbf{R}_3[x] = \{a_2x^2 + a_1x + a_0 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbf{R}\}$. 设 $\mathbf{R}_3[x]$ 对 $\mathbf{R}^{2\times 2}$ 的映射 σ 满足：

$$\sigma(p(x)) = \begin{pmatrix} p(1) - p(2) & 0 \\ 0 & p(0) \end{pmatrix}$$

（1）证明：σ 为线性映射.

（2）试分别写出 $\mathbf{R}_3[x], \mathbf{R}^{2\times 2}$ 上的两组基 B_1, B_2，并求出 σ 关于这两组基的矩阵.

(3) 求 $\mathrm{Im}\sigma, \ker\sigma$.

(4) 分别给出 $\mathbf{R}_3[x]$ 的一个与 $\mathrm{Im}\sigma$ 同构的子空间，和 $\mathbf{R}^{2\times 2}$ 的一个与 $\mathrm{Ker}\sigma$ 同构的子空间.

八、（20 分）判断下列命题的真伪，若它是真命题，请给出简单的证明；若它是伪命题，给出理由或举反例将它否定.

（1）若 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta$ 的秩大于 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 的秩，则 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta$ 线性无关；

（2）设 U, V, W 为 V_0 关于数域 F 的线性空间，若 $U+V=U+W$，则 $V=W$；

（3）任意不为 0 矩阵的二阶矩阵可以表示为若干初等矩阵的乘积；

（4）若 A, B 相似或者相合，则 A, B 相抵.