2022-2023 学年线性代数 I（H）期中

任课老师：刘康生　　　　考试时长：45 分钟

一、 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} a & -1 & 1 \\ -1 & a & -1 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix}$，$\beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. 假设线性方程组 $Ax = \beta$ 有解但解不唯一.

(1) 求 a 的值;

(2) 给出 $Ax = \beta$ 的所有解.

二、 设

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \ Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

定义 $\mathbf{R}^{3\times 2}$ 上映射 σ：

$$\sigma(A) = PAQ.$$

(1) 验证 σ 是线性映射;

(2) 求 $\operatorname{im}\sigma$ 和 $\ker\sigma$;

(3) 求 $\mathbf{R}^{3\times 2}$ 的两组基 B_1, B_2，使得 σ 在 B_1, B_2 下的矩阵为对角矩阵.

三、 设 $B = \{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\}$ 是实数域 $\mathbf{R}$ 上线性空间 V 的一组基, $T \in \mathcal{L}(V)$, $T(\beta_1) = \beta_2$, $T(\beta_2) = \beta_3$，$\cdots$，$T(\beta_{n-1}) = \beta_n$，$T(\beta_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i\beta_i (a_i \in \mathbf{R})$. 求 T 在 B 下的表示矩阵. 在什么条件下 T 是同构映射?

四、 判断下列命题的真伪，若它是真命题，请给出简单的证明；若它是伪命题，给出理由或举反例将它否定.

(1) 若 W 是线性空间 V 的子空间，$\alpha \in V$，则 $\alpha + W$ 是 V 的子空间;

(2) 若 W 是线性空间 V 的子空间，对任何的 $\alpha \in V$，定义 $\overline{\alpha} = \alpha + W$，则

$$\overline{\alpha} = \overline{\beta} \text{ 或者} \overline{\alpha} \cap \overline{\beta} = \varnothing;$$

(3) 若方阵 $A^3 = 0$，则 $E + A$ 和 $E - A$ 都是可逆矩阵;

(4) 若方阵 $A^2 = A$，则 $E + A$ 和 $E - A$ 都是可逆矩阵.