2022-2023 学年线性代数 I（H）期中

任课老师：吴志祥　　　　考试时长：90 分钟

一、（10 分）讨论当 a 取何值时，下列方程组有解？无解？

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1 \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=a \\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=3 \\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=2 \end{cases}.$$

二、（10 分）证明向量组 $\{2\alpha_1+\alpha_2, 2\alpha_2+\alpha_3, 2\alpha_3+\alpha_1\}$ 线性无关的充分必要条件是向量组 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ 线性无关.

三、（10 分）已知向量 $\alpha_1=(1,2,4,3)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_2=(1,-1,-6,6)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_3=(-2,-1,2,-9)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_4=(1,1,-2,7)^{\mathrm{T}}$，$\beta=(4,2,4,a)^{\mathrm{T}}$.

(1) 求子空间 $W=\operatorname{span}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 的维数和一组基；

(2) 求 a 的值，使得 $\beta\in W$，并求 β 在（1）中选取的基下的坐标.

四、（10 分）设 $\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4\}$ 是欧式空间 V 的一组标准正交基，$W=\operatorname{span}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，其中 $\alpha_1=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4, \alpha_2=3\varepsilon_1+3\varepsilon_2-\varepsilon 3-\varepsilon_4, \alpha_3=-2\varepsilon_1+6\varepsilon_3+8\varepsilon_4$.

(1) 求 α_1,α_2 的夹角；

(2) 求 W 的一组标准正交基.

五、（10 分）已知 $f_1=1-x, f_2=1+x^2, f_3=x+2x^2$ 是 $\mathbf{R}[x]_3$ 中三个元素，σ 是 $\mathbf{R}[x]_3$ 上的线性变换且满足 $\sigma(f_1)=2+x^2, \sigma(f_2)=x, \sigma(f_3)=1+x+x^2$.

(1) 证明：f_1,f_2,f_3 构成 $\mathbf{R}[x]_3$ 的一组基；

(2) 求 σ 在基 $\{f_1,f_2,f_3\}$ 下的矩阵；

(3) 设 $f=1+2x+3x^2$，求 $\sigma(f)$.

六、（10 分）已知 $\mathbf{R}^3$ 的两个线性变换 σ,τ 为

$$\sigma(x_1,x_2,x_3)=(x_1+2x_2+3x_3,-x_1+2x_2-x_3,0),$$

$$\tau(x_1,x_2,x_3)=(x_2,x_3,0).$$

(1) 求 $r(\sigma+\tau)$ 和 $r(\sigma\tau)$；

(2) 求 $\operatorname{im}\sigma+\ker\sigma$.

七、（10 分）设 $M_n(\mathbf{R})$ 是实数域 $\mathbf{R}$ 上所有 n 阶矩阵组成的集合. 设 $W=\{A\in M_n(\mathbf{R})\mid a_{ji}=ka_{ij},\ i\leqslant j\}$，求当 $k=0,1,2$ 时，W 的一组基和维数.

八、（10 分）设 V 是域 $\mathbf{F}$ 上的 n 维线性空间，$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 是 V 的一组基，且

$$V_1=\operatorname{span}(\alpha_1+2\alpha_2+\cdots+n\alpha_n)$$
$$V_2=\left\{k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n\,\middle|\,k_1+\frac{k_2}{2}+\cdots+\frac{k_n}{n}=0\right\}$$

证明:

(1) V_2 是 V 的子空间;

(2) $V=V_1\oplus V_2$.

九、(20 分) 判断下列命题的真伪, 若它是真命题, 请给出简单的证明; 若它是伪命题, 给出理由或举反例将它否定.

(1) $\forall n\geqslant 2$，不存在非零实线性映射 $f:M_n(\mathbf{R})\to\mathbf{R}$ 使得 $f(AB)=f(A)f(B)$;

(2) 设 W_1,W_2 是线性空间 V 的两个子空间, $W_1\cup W_2=W_1+W_2$ 当且仅当 $W_1\subseteq W_2$ 或 $W_2\subseteq W_1$;

(3) 设 α,β 是欧式空间 V 中两个线性无关向量，且 $\dfrac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}$ 和 $\dfrac{2(\alpha,\beta)}{(\beta,\beta)}$ 都是不大于零的整数，则 α 和 β 的夹角只可能是 $\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{2\pi}{3}$，$\dfrac{3\pi}{4}$，$\dfrac{5\pi}{6}$;

(4) n 是一个大于 1 的整数，$W=\{(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathbf{C}^n\mid x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=0\}$ 是复线性空间 $\mathbf{C}^n$ 的一个子空间.