2023-2024 学年线性代数 I（H）期末

任课老师：统一命卷　　　　　考试时长：120 分钟

一、（10 分）求线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1+x_2-3x_3-5x_4=6 \\ 2x_1+x_2-2x_3-6x_4=7 \\ -3x_1+2x_2+x_3+4x_4=5 \\ -x_1+3x_2+2x_3+bx_4=11 \end{cases}$$

在 b 为多少的时候无解、有唯一解或有无数组解，并在有无数组解的时候求出一般解.

二、（10 分）W_1, W_2 是 $\mathbb{R}^4$ 的子集，满足以下条件: $W_1=\{(x,-x,y,z)|(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\}$，$W_2=\{(x,y,-x,z)|(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\}$.

（1）证明：W_1, W_2 是 $\mathbb{R}^4$ 的子空间.

（2）求 $W_1\cap W_2$，W_1+W_2 的维数和一组基.

三、（10 分）$B_1=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}, B_2=\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的向量组，$\alpha_1=(1,1,1), \alpha_2=(1,1,0)$,
$\alpha_3=(1,0,0)$，$\beta_1=(1,2,1), \beta_2=(2,3,3), \beta_3=(3,7,1)$, 映射 $\sigma:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ 满足 $\sigma(\alpha_1)=\beta_1, \sigma(\alpha_2)=\beta_2, \sigma(\alpha_3)=\beta_3$.

（1）求 α，使得 $\sigma(\alpha)=(3,6,2)$.

（2）证明：B_2 是 $\mathbb{R}^3$ 的一组基.

（3）求 σ 在基 B_2 下的矩阵表示.

四、（10 分）$p(x)\in\mathbb{R}[x]_3$，映射 σ 满足 $\sigma(p(x))=(2x+1)p'(x)+p(1)$.

（1）证明：σ 是线性映射.

（2）求 σ 的特征值和对应的特征向量.

（3）求 $\mathbb{R}[x]_3$ 的一组基，使得 σ 在这组基下是对角矩阵.

五、（10 分）求下面行列式的值：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}$$

六、（10 分）n 阶矩阵 A 满足：$A^2 = 3A - 2E$，求证：

（1）A 可对角化.

（2）$\mathrm{tr}(A)$ 在 n 和 $2n$ 之间.

七、（10 分）A, B, C 都是 n 阶矩阵， C 的秩为 r，满足 $AC = CB$，求证：A, B 至少有 r 个特征值相同，从而相似矩阵的特征值相同.

八、（10 分）$f(x, y, z) = 5x^2 + y^2 + tz^2 + 4xy - 2yz - 2xz$，当 t 取何值时，$f(x, y, z)$ 是正定，半正定，不定的? 并求不定时的正负惯性系数.

九、（20 分）判断下列命题的真伪，若它是真命题，请给出简单的证明；若它是伪命题，给出理由或举反例将它否定.

（1）$n \geq 2, \alpha, \beta$ 都是 $n \times 1$ 的列向量，则 $A = \alpha\beta^T$ 可对角化；

（2）V, W 是域 $\mathbb{F}$ 上非零的有限维线性空间，则在 V, W 之间存在非零线性映射；

（3）两复对称矩阵相合当且仅当它们相抵；

（4）A 是 m 阶实正定矩阵， C 为 $m \times n$ 的实矩阵， $\mathrm{r}(C) = m$，则 C^TAC 也正定.