

线性代数 II (H) 期中/小测历年卷试题集

2020-2021 学年线性代数 II (H) 期中

任课老师: 刘康生

考试时长: 60 分钟

一、 设 $V = \mathbf{R}^{2 \times 2}$, $W = \mathbf{R}^{3 \times 2}$, $T \in \mathcal{L}(V, W)$ 由下面的矩阵乘法定义:

$$T(A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} A, \quad \forall A \in V.$$

(1) 求 T 的像空间与核空间;

(2) 求 V 和 W 的一组基, 使得 T 在这两组基下的矩阵为 $\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{6 \times 4}$, 其中 E_r 为 r 阶单位矩阵, $r = \dim \operatorname{im} T$.

二、 设 $V = \mathbf{R}^3$, $U = \{(x_1, x_2, x_3) \in V \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$, $\alpha_1 = (1, 1, 1)$, 求 $f \in V'$ 使得

$$f(\alpha_1) = 1, f(\alpha) = 0, \forall \alpha \in U.$$

三、 设 $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 满足 $A^2 = A$, 证明: 存在可逆矩阵 P 使得

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{n \times n},$$

其中 r 为 A 的秩.

2020-2021 学年线性代数 II (H) 小测

任课老师：刘康生

考试时长：45 分钟

- 一、叙述复内积空间上正规变换的等价刻画（越多越好）。
- 二、叙述实内积空间上正规变换的等价刻画（越多越好）。
- 三、设 $T, S \in \mathcal{L}(V)$, V 是内积空间, 且满足 $\|Tv\| = \|Sv\|$, $\forall v \in V$. 问是否存在等距同构 $U \in \mathcal{L}(V)$, 使得 $T = US$? 若存在, 证明之; 若不存在, 举反例.

四、设 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- (1) 验证 A 是正规的;
- (2) 求实正交矩阵 P 使得

$$P^T A P = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}.$$