2020-2021 学年线性代数 II（H）期中

任课老师：谈之奕　　　　考试时长：90 分钟

一、（10 分）设 $g(x)=ax+b$，$a,b\in\mathbf{F}$，$a\neq 0$，$f(x)\in\mathbf{F}[x]$，证明：$g(x)$ 是 $f^2(x)$ 的因式的充要条件是 $g(x)$ 是 $f(x)$ 的因式.

二、（10 分）设 λ 是 n 阶实矩阵 A 的特征值，$\lambda^3=1$ 且 $\lambda\notin\mathbf{R}$，A 的极小多项式次数为 2，证明：矩阵 $A+I$ 可逆.

三、（15 分）设算子 T 的特征值仅为 1，代数重数为 5，几何重数为 3，求 T 的所有可能的若当标准形及相应的极小多项式.

四、（20 分）设 V 为 n 维复向量空间，$T\in L(V)$，T 在 V 的一组基 $e_1,e_2,\ldots,e_n$ 下的矩阵为对角矩阵 $\mathrm{diag}\{d_1,\ldots,d_n\}$，且 $d_i\neq d_j(i\neq j)$.

(1) 求 T 的所有一维不变子空间；

(2) 求 T 的所有不变子空间.

五、（20 分）设 V 为 n 维复向量空间，$S,T\in L(V)$，$ST=TS$，则

(1) S,T 至少有一个公共的特征向量；

(2) 存在 V 的一组基，使得 S 和 T 在此基下的矩阵均为上三角矩阵.

六、（25 分）设 $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\-2&-1&-2\\1&1&2\end{pmatrix}$，求 A 的若当标准形 J 和矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=J$.