2022-2023 学年线性代数 II（H）期末

任课老师：统一命卷　　　　考试时长：120 分钟

一、（15 分）已知 $T \in \mathcal{L}(\mathbf{C}^3)$，其对应矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2023 & 0 & 0 \\ 6 & 28 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) 求 A 的 Jordan 标准形（不必求 Jordan 基）；

(2) 证明不存在复矩阵 B 使得 $B^2 = A$.

二、（15 分）已知直线 $L_1 = \begin{cases} x+y+z-1=0 \\ x-2y+2=0 \end{cases}$，$L_2 = \begin{cases} x = 2t \\ y = t+a \\ z = bt+1 \end{cases}$，试确定 a，b 满足的条件使得 L_1，L_2 是：

(1) 平行直线;

(2) 异面直线.

三、（18 分）定义在 $V = \mathbf{R}^3$ 上的运算

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle_V = x_1y_1 + x_2y_2 + (x_2+x_3)(y_2+y_3)$$

其中 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$，$\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)$.

(1) 验证 $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ 是 $\mathbf{R}^3$ 上的一个内积;

(2) 求 $\mathbf{R}^3$ 在 $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ 下的一组标准正交基;

(3) 求 $\boldsymbol{\beta} \in V$ 使得 $\forall \boldsymbol{x} \in V : x_1 + 2x_2 = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\beta} \rangle_V$.

四、（15 分）$T \in \mathcal{L}(V)$ 在一组基 $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ 下的矩阵为

$$T(\boldsymbol{\varepsilon}) = (\boldsymbol{\varepsilon}) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

求 V 所有的 T-不变子空间.

五、（20 分）试给出下列命题的真伪. 若命题为真，请给出简要证明；若命题为假，请举出反例.

(1) $T \in \mathcal{L}(V)$. 若子空间 $W \in V$ 在 T 下不变，则其补空间 W' 在 T 下也不变;

(2) 定义 $T \in \mathcal{L}(V,W)$: $Tv = \langle v, \alpha \rangle \beta$, $\beta \in W$ 对 $\forall v \in V$ 成立，则 $T^* w = \langle w, \beta \rangle \alpha$, $\alpha \in V$ 对 $\forall w \in W$ 成立;

(3) $T \in \mathcal{L}(V)$ 是非幂零算子，满足 $\operatorname{null} T^{n-1} \neq \operatorname{null} T^{n-2}$. 则其极小多项式为

$$m(\lambda) = \lambda^{n-1}(\lambda - a) 0 \neq a \in \mathbf{R}$$

(4) $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$. $S_1 = A^{\mathrm{T}} + A$, $S_2 = A^{\mathrm{T}} - A$. 则 A 是正规矩阵当且仅当 $S_1 S_2 = S_2 S_1$.

(5) $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$ 是正规矩阵，则 A 的实部矩阵和虚部矩阵是对称矩阵.

六、（15 分）$T \in \mathcal{L}(V)$. 有极分解 $T = S\sqrt{G}$，其中 S 是等距同构，$G = T^* T$. 证明以下条件等价:

(1) T 是正规算子;

(2) $GS = SG$;

(3) G 的所有特征空间 $E(\lambda, G)$ 都是 S-不变的.