2022-2023 学年线性代数 II（H）期中

任课老师：刘康生　　　　考试时长：45 分钟

注：上午班考察 1-3 题，下午班考察 2-4 题

一、 设 $V = \mathbf{R}[x]_4$（即次数不超过 4 的实系数多项式全体构成的线性空间），$T \in \mathcal{L}(V)$，T' 是 T 的对偶映射. 已知 $\ker T' = \operatorname{span}(\varphi)$，$\varphi \in V'$，$\varphi(p) = p(18)$，$\forall p \in V$. 求 $\operatorname{im} T$.

二、 设 e_1, e_2, e_3, e_4 是欧式空间 $\mathbf{R}^4$ 的标准正交基，设 $\alpha_1 = e_1 - e_2, \alpha_2 = e_2 - e_3, \alpha_3 = e_3 - e_4, \beta_1 = e_4, \beta_2 = e_1 + e_2 + e_3, \beta_3 = e_4 - e_1 - 2e_2 - 3e_3$. 求 $w \in \mathbf{R}^4$ 使得 $\langle \alpha_j, w \rangle < 0$ 且 $\langle \beta_j, w \rangle > 0$，$j = 1, 2, 3$.

三、 已知平面方程

$$\pi_1 : x - 2y + 2z + d = 0,\ \pi_2 : -2x + 4y + cz + 1 = 0.$$

分别求 c，d 使分别满足

(1) π_1 与 π_2 平行；

(2) π_1 与 π_2 重合；

(3) π_1 与 π_2 垂直；

(4) π_1 与 π_2 相交，并求交线的参数方程；

(5) 原点到交线的最短距离为 1.

四、 对 $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbf{C}^n$，定义 1 范数为 $||x||_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|$，设 $A = (a_{ij})_{n \times n} \in \mathbf{C}^{n \times n}$.

(1) 求 A 关于 1 范数的矩阵范数，即 $||A||_1 = \max\{||AX||_1 \mid ||X||_1 = 1\}$；

(2) 已知 $B = (b_{ij})_{n \times n} \in \mathbf{C}^{n \times n}$，$|a_{ij}| \leqslant b_{ij}$，$1 \leqslant i, j \leqslant n$. 证明：对任何正整数 m，有 $||A^m||_1 \leqslant ||B^m||_1$；

(3) 设 $|a_{ii}| < 1$，$1 \leqslant i \leqslant n$，$a_{ij} = 0 (i > j)$. 证明：$||A^m||_1 \to 0 (m \to \infty)$.(提示：若 $a_{ij} = 0 (i > j)$，则 $A^n = O$)