2022-2023 学年线性代数 II（H）期中

任课老师：吴志祥　　　　考试时长：90 分钟

一、（15 分）求通过直线 $L:\begin{cases}2x+y-3z+2=0\\5x+5y-4z+3=0\end{cases}$ 的两个互相垂直的平面 π_1 和 π_2，使 π_1 过点 $(4,-3,1)$.

二、（15 分）求直线 $l_1:\begin{cases}x-y=0\\z=0\end{cases}$ 与直线 $l_2:\dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-3}{-1}$ 的距离.

三、（15 分）设 $\mathbf{R}[X]$ 是实系数多项式构成的线性空间，令 $W=\{(x^3+x^2+1)h(x)\mid h(x)\in\mathbf{R}[x]\}$.

(1) 证明：W 是 $\mathbf{R}[x]$ 的子空间；

(2) 求 $\mathbf{R}[x]/W$ 的一组基和维数.

四、（15 分）设 V 和 W 是数域 $\mathbf{F}$ 上的线性空间，$V_1,V_2,\ldots,V_n$ 是 V 的 n 个子空间且 $V=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_n$. 证明：$\mathcal{L}(V,W)$ 和 $\mathcal{L}(V_1,W)\times\mathcal{L}(V_2,W)\times\cdots\times\mathcal{L}(V_n,W)$ 同构.

五、（10 分）设 V 是一个有限维线性空间，$T\in\mathcal{L}(V)$ 是同构映射，记其逆映射为 T^{-1}. 设 W 是 T 的不变子空间，证明：W 是 T^{-1} 的不变子空间.

六、（15 分）设 $M_n(\mathbf{C})$ 是 n 阶复矩阵全体构成的线性空间，$U=\{A\in M_n(\mathbf{C})\mid A^{\mathrm{T}}=A\},W=\{B\in M_n(\mathbf{C})\mid B^{\mathrm{T}}=-B\}$. 在 $M_n(\mathbf{C})$ 上定义二元映射 $\langle,\rangle:M_n(\mathbf{C})\times M_n(\mathbf{C})\to\mathbf{C}$，使得对于任意的 $A,B\in M_n(\mathbf{C})$，有 $\langle A,B\rangle=\mathrm{tr}(AB^{\mathrm{H}})$，其中 B^{H} 表示 B 的共轭转置矩阵.

(1) 证明：$(M_n(\mathbf{C}),\langle\rangle)$ 是复内积空间；

(2) 证明：$U=W^{\perp}$；

(3) 设 $A\in M_n(\mathbf{C})$，试求 $B\in U$ 使得 $\forall D\in U$，有 $||A-B||\leqslant||A-D||$，其中 $||A||=\sqrt{\langle A,A\rangle}$.

七、（15 分）设 $\mathbf{R}[x]_3$ 是由次数小于 3 的实系数多项式构成的线性空间. 对于 $g(x)\in\mathbf{R}[x]_3$，定义 $f_1(g(x))=\int_0^1 g(x)dx$，$f_2(g(x))=\int_0^2 g(x)dx$，$f_3(g(x))=\int_0^{-1} g(x)dx$.

(1) 证明：f_1,f_2,f_3 是 $\mathbf{R}[x]_3$ 对偶空间的一组基；

(2) 求 $\mathbf{R}[x]_3$ 的一组基 $g_1(x),g_2(x),g_3(x)$，使得 f_1,f_2,f_3 是 $g_1(x),g_2(x),g_3(x)$ 的对偶基.