第五讲 期末复习

2023-2024 学年秋冬学期线性代数 I（H）课程辅学

吴一航

浙江大学竺可桢学院学业指导中心

2023 年 12 月 28 日

本次课程大致框架

- 导言：这一学期我们学习了什么
- 核心：分章节讨论基本知识和题型
- 故事的结尾：未竟之美

个人认为，线性代数的难点主要有以下三个：

1. 概念的抽象定义. 大量使用公理化的定义，所以重要的是熟悉很多例子来辅助我们理解这些概念（例如新版 LALU 线性空间）. 事实上不难发现线性代数很多例子都是为了解释概念，而非像微积分一样介绍各种计算的方法技巧结论，**事实上理解了概念线代就成功了一大半，毕竟考试也并不强调很刁钻的技巧**（特别是判断题）.

个人认为，线性代数的难点主要有以下三个：

1. 概念的抽象定义. 大量使用公理化的定义，所以重要的是熟悉很多例子来辅助我们理解这些概念（例如新版 LALU 线性空间）. 事实上不难发现线性代数很多例子都是为了解释概念，而非像微积分一样介绍各种计算的方法技巧结论，**事实上理解了概念线代就成功了一大半，毕竟考试也并不强调很刁钻的技巧**（特别是判断题）.
2. 引入矩阵行列式后，线性代数中计算技巧也变多，特征值部分则是大面积应用，事实上很多题目都是基本模型，属于常见技巧，在 LALU 上一定有总结，**教材课后题也覆盖了考试需要的技巧**，当然接下来我们会做一个比较全面的总结.

个人认为，线性代数的难点主要有以下三个：

1. 概念的抽象定义. 大量使用公理化的定义，所以重要的是熟悉很多例子来辅助我们理解这些概念（例如新版 LALU 线性空间）. 事实上不难发现线性代数很多例子都是为了解释概念，而非像微积分一样介绍各种计算的方法技巧结论，**事实上理解了概念线代就成功了一大半，毕竟考试也并不强调很刁钻的技巧**（特别是判断题）.
2. 引入矩阵行列式后，线性代数中计算技巧也变多，特征值部分则是大面积应用，事实上很多题目都是基本模型，属于常见技巧，在 LALU 上一定有总结，**教材课后题也覆盖了考试需要的技巧**，当然接下来我们会做一个比较全面的总结.
3. **很难梳理出一条合适的主线**，不像微积分有极限、连续、微分和积分这样的明确的板块，只是把线性代数当成学习了线性空间、矩阵、行列式、特征值是不够的，很多概念我们不知道为什么要引入，不知道有什么用，使得抽象的概念更加抽象，所以 LALU 很强调主线.

线性代数这门课讲了什么事情?

线性代数这门课讲了什么事情?

1. 两个目标
   1. 线性空间的分类（坐标同构，蕴含了线性空间的本质特征）
   2. 线性映射矩阵表示的简化（矩阵的分类，基于相抵、相似、相合）

线性代数这门课讲了什么事情?

1. 两个目标
   1. 线性空间的分类（坐标同构，蕴含了线性空间的本质特征）
   2. 线性映射矩阵表示的简化（矩阵的分类，基于相抵、相似、相合）
2. 两个应用
   1. 线性方程组一般理论
   2. 几何（内积空间，解析几何、二次型）

线性代数这门课讲了什么事情?

1. 两个目标
   1. 线性空间的分类（坐标同构，蕴含了线性空间的本质特征）
   2. 线性映射矩阵表示的简化（矩阵的分类，基于相抵、相似、相合）
2. 两个应用
   1. 线性方程组一般理论
   2. 几何（内积空间，解析几何、二次型）
3. 两个思路（一个桥梁：线性映射矩阵表示）
   1. 几何：线性空间与线性映射
   2. 代数：矩阵

线性代数这门课讲了什么事情?

1. 两个目标
   1. 线性空间的分类(坐标同构,蕴含了线性空间的本质特征)
   2. 线性映射矩阵表示的简化(矩阵的分类,基于相抵、相似、相合)
2. 两个应用
   1. 线性方程组一般理论
   2. 几何(内积空间,解析几何、二次型)
3. 两个思路(一个桥梁:线性映射矩阵表示)
   1. 几何:线性空间与线性映射
   2. 代数:矩阵

一句话总结:线性代数是研究线性空间和线性映射的学科,我们通过几何和代数两个思路实现线性代数的终究目标,并在过程中解决了历史上两个重要的问题:线性方程组的解和简单的解析几何.

导言（Cont’d）

行列式？

回顾线性代数学习的章节，好像少了点什么... 行列式在哪里呢?

回顾线性代数学习的章节，好像少了点什么... 行列式在哪里呢?

1. 判断矩阵是否可逆；
2. Cramer 法则；
3. 求特征值...

虽然它简化了我们的计算，但是其实都可以被其它方法绕过... 绕不过的是它的几何意义：线性变换对空间的拉伸程度（定义了 n 维空间中的体积）.

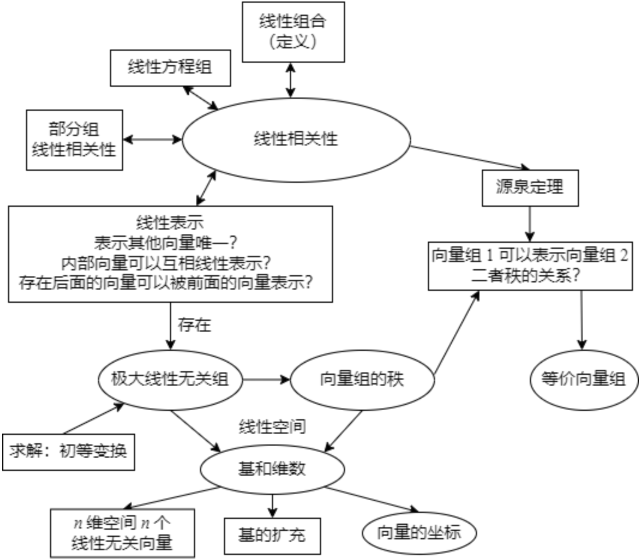
1. 线性空间的定义与判断
2. 子空间的等价条件与判断
3. 线性相关性的判别与等价条件，向量组的秩
4. 极大线性无关组的求解
5. 基与维数的求解与判定
6. 向量的坐标
7. 线性空间的交、并、和、直和，线性空间维数公式
8. 过渡矩阵的定义与性质

整体思路

线性空间：在集合上定义运算构成的可以用一组基张成的代数结构，特别注意验证线性空间需要首先验证封闭性（例子见 LALU）.

我们从线性空间的定义出发，通过几条运算性质推导出了更强的性质，发现这几条运算定义下可以有线性表示的运算，然后思考线性表示张成空间最少需要多少向量，从而引入向量组的极大线性无关组和秩，接着引入线性空间的基和维数，从而了解到线性空间的一切研究都可以转到基上，这是线性空间的基本结构. 然后通过坐标发现任何一个线性空间都能同构于向量空间 $\mathbf{R}^n$，发现线性空间基之间的差别也可以被遮蔽，最本质的同构不变量是维数，从而实现了线性空间分类这第一大目标.

整体思路（Cont’d）


线性组合
(定义)
线性方程组
部分组
线性相关性
线性相关性
源泉定理
线性表示
表示其他向量唯一?
内部向量可以互相线性表示?
存在后面的向量可以被前面的向量表示?
向量组 1 可以表示向量组 2
二者秩的关系?
存在
极大线性无关组
向量组的秩
等价向量组
线性空间
求解：初等变换
基和维数
n 维空间 n 个
线性无关向量
基的扩充
向量的坐标

线性相关性

平凡的定义和例子略去，我们来看以下几个经典的例子：

例 (函数线性相关性，2013-2014 期末)

记 $V = \{f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \mid f \text{可导}\}$，即 V 是由实数导自身的全体可导函数所构成的集合.

1. 给出 V 上加法和数乘使 V 成为实线性空间，并写出 V 的零向量.
2. 记 $S = \{f_1, f_2, f_3\}$，其中 $f_1(x) = x; f_2(x) = \sin x; f_3(x) = e^x, \forall x \in \mathbf{R}$. 证明 S 是 V 的线性无关子集.

线性相关性

平凡的定义和例子略去，我们来看以下几个经典的例子：

例 (函数线性相关性，2013-2014 期末)

记 $V=\{f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}\mid f\text{ 可导 }\}$，即 V 是由实数导自身的全体可导函数所构成的集合.

1. 给出 V 上加法和数乘使 V 成为实线性空间，并写出 V 的零向量.
2. 记 $S=\{f_1,f_2,f_3\}$，其中 $f_1(x)=x; f_2(x)=\sin x; f_3(x)=e^x, \forall x\in\mathbf{R}$. 证明 S 是 V 的线性无关子集.

例

1. 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 线性无关. 证明：在向量组 $\beta,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 中至多有一个向量 α_i $(1\leqslant i\leqslant r)$ 可被其前面的 i 个向量 $\beta,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{i-1}$ 线性表示.
2. 属于不同特征值的特征向量线性无关.

证明思想：从左到右（或反之）寻找满足某些条件的向量.

例

设 σ 是线性空间 V 上的线性变换，如果 $\sigma^{k-1}(\alpha)\neq 0$，但 $\sigma^{k}(\alpha)=0$，证明：$\alpha,\sigma(\alpha),\ldots,\sigma^{k-1}(\alpha)$（$k>0$）线性无关（本题还有对应的矩阵版本）.

例

设 A 为 n 阶矩阵，X_1,X_2,X_3 为 n 元列向量，且
$AX_1=kX_1\ \ (X_1\neq 0),AX_2=lX_1+kX_2,AX_3=lX_2+kX_3\ \ (l\neq 0)$. 证明：
X_1,X_2,X_3 线性无关.

例 (2018-2019 期末)

设 A 是数域 $\mathbf{F}$ 上一个 n 阶方阵，E 是 n 阶单位矩阵，$\alpha_1\in\mathbf{F}^n$ 是 A 的属于特征值 λ 的一个特征向量，向量组 $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_s$ 按如下方式产生：
$(A-\lambda E)\alpha_{i+1}=\alpha_i(i=1,\ 2,\ \ldots,\ s-1)$. 证明向量组 $\{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_s\}$ 线性无关.

例

下列命题是否正确？若正确，请给出证明；若不正确，请给出反例.

1. 若 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m(m>2)$ 线性相关，则其中每个向量都是其余向量的线性组合；
2. 若 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$ 线性无关，则其中每个向量都不是其余向量的线性组合（并写出这一命题的等价形式）；
3. $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m(m>2)$ 线性无关的充要条件是任意两个向量都线性无关；
4. 若 α_1,α_2 线性相关，β_1,β_2 线性相关，则 $\alpha_1+\beta_1$ 和 $\alpha_2+\beta_2$ 也线性相关；
5. 若 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 线性无关，则 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\cdots,\alpha_{n-1}+\alpha_n,\alpha_n+\alpha_1$ 也线性无关；
6. 若 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，则 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$ 线性相关.

线性子空间

定义 (线性子空间)

设 W 是线性空间 $V(\mathbf{F})$ 的非空子集，如果 W 对 V 中的运算也构成域 $\mathbf{F}$ 上的线性空间，则称 W 是 V 的线性子空间（简称子空间）.

验证子空间时注意两条：第一验证非空，第二验证加法、数乘封闭.

例 (历年卷判断题组合)

1. 域 F 上的全体 n 阶可逆阵构成 $M_{n\times n}(\mathbf{F})$ 的一个子空间.
2. 域 $\mathbf{F}$ 上所有 n 阶不可逆方阵所构成的集合是 n 阶矩阵空间 $M_n(\mathbf{F})$ 的子空间.

定理 (线性扩张构造子空间)

线性空间 $V(\mathbf{F})$ 的非空子集 S 的线性扩张 $\mathrm{span}(S)$ 是 V 中包含 S 的最小子空间.

证明一组向量是线性空间的一组基时，以下三个条件满足其二即可:

1. 线性空间中任一向量都可以被这组向量线性表示;
2. 这组向量线性无关;
3. 这组向量的长度等于线性空间的维数.

关于基与维数，我们有一个重要的结论，有些情况下是可以使用的:

例

证明以下两个结论:

1. **设 U 和 W 都是 V 的非零子空间，如果 $U \subseteq W$，那么 $\dim U \leqslant \dim W$;**
2. **设 U 和 W 都是 V 的非零子空间，$U \subseteq W$，且 $\dim U = \dim W$，则 $U = W$.**

基与维数（Cont'd）

例 (不同数域影响数乘影响维数)

证明：线性空间 $\mathbf{C}(\mathbf{C})$ 维数为 1，不同于线性空间 $\mathbf{C}(\mathbf{R})$ 维数为 2.

基与维数（Cont'd）

例 (不同数域影响数乘影响维数)

证明：线性空间 $\mathbf{C}(\mathbf{C})$ 维数为 1，不同于线性空间 $\mathbf{C}(\mathbf{R})$ 维数为 2.

例

证明：$1,(x-5)^2,(x-5)^3$ 是 $\mathbf{R}[x]_4$ 的子空间 U 的一组基，其中 U 定义为 $U=\{p\in\mathbf{R}[x]_4 \mid p'(5)=0.$

例 (不同数域影响数乘影响维数)

证明：线性空间 $\mathbf{C}(\mathbf{C})$ 维数为 1，不同于线性空间 $\mathbf{C}(\mathbf{R})$ 维数为 2.

例

证明：$1,(x-5)^2,(x-5)^3$ 是 $\mathbf{R}[x]_4$ 的子空间 U 的一组基，其中 U 定义为 $U=\{p\in\mathbf{R}[x]_4 \mid p'(5)=0$.

例

$W=\{A\in M_n(\mathbb{R}) \mid a_{ji}=ka_{ij},\ i\le j\}$，求 $k=0,1,2$ 时，W 的一组基和维数.

基与维数（Cont'd）

例 (不同数域影响数乘影响维数)

证明：线性空间 $\mathbf{C}(\mathbf{C})$ 维数为 1，不同于线性空间 $\mathbf{C}(\mathbf{R})$ 维数为 2.

例

证明：$1,(x-5)^2,(x-5)^3$ 是 $\mathbf{R}[x]_4$ 的子空间 U 的一组基，其中 U 定义为 $U=\{p\in\mathbf{R}[x]_4 \mid p'(5)=0$.

例

$W=\{A\in M_n(\mathbb{R}) \mid a_{ji}=ka_{ij},\ i\leq j\}$，求 $k=0,1,2$ 时，W 的一组基和维数.

例

设 $S(A)=\{B\in\mathbf{F}^{n\times n} \mid AB=0\}$.

1. 证明：$S(A)$ 为 $\mathbf{F}^{n\times n}$ 的子空间；
2. 设 $r(A)=r$，求 $S(A)$ 的一组基和维数.

例

设 V_1, V_2 是数域 $\mathbf{F}$ 上的线性空间，$\forall(\alpha_1,\alpha_2),(\beta_1,\beta_2)\in V_1\times V_2, \forall k\in\mathbf{F}$，规定

$$(\alpha_1,\alpha_2)+(\beta_1,\beta_2)=(\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2),$$

$$k(\alpha_1,\alpha_2)=(k\alpha_1,k\alpha_2).$$

1. 证明：$V_1\times V_2$ 关于以上运算构成数域 $\mathbf{F}$ 上的线性空间；
2. 若 $\dim V_1=m, \dim V_2=n$，求 $\dim(V_1\times V_2)$.

基与维数（Cont'd）

例

设 V_1, V_2 是数域 $\mathbf{F}$ 上的线性空间，$\forall(\alpha_1,\alpha_2),(\beta_1,\beta_2)\in V_1\times V_2, \forall k\in\mathbf{F}$，规定

$$(\alpha_1,\alpha_2)+(\beta_1,\beta_2)=(\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2),$$

$$k(\alpha_1,\alpha_2)=(k\alpha_1,k\alpha_2).$$

1. 证明：$V_1\times V_2$ 关于以上运算构成数域 $\mathbf{F}$ 上的线性空间；
2. 若 $\dim V_1=m, \dim V_2=n$，求 $\dim(V_1\times V_2)$.

例

设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\2&a&1\\-1&1&a\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}2&2\\1&a\\-a-1&-2\end{pmatrix}$，当 a 为何值时，方程 $AX=B$ 无解，有唯一解，有无穷多解？有解时，求解此方程.

极大线性无关组的求解方法略，但请务必掌握（高斯消元取主元素所在列即可，原理是初等行变换不改变列向量之间的线性关系）. 极大线性无关组求解十分常用，例如求子空间和的基，求线性映射的像等都需要（基的扩充最程序化的方法也需要）. 但我们没有介绍过求交集的一般方法，下面我们将给出一个例子.

例

设 $\alpha_1 = (1,0,-1,0)^{\mathsf{T}}, \alpha_2 = (0,1,2,1)^{\mathsf{T}}, \alpha_3 = (2,1,0,1)^{\mathsf{T}}$ **是四维实向量空间** V **中的向量，它们生成的子空间为** V_1**，又向量** $\beta_1 = (-1,1,1,1)^{\mathsf{T}}, \beta_2 = (1,-1,-3,-1)^{\mathsf{T}}, \beta_3 = (-1,1,-1,1)^{\mathsf{T}}$ **生成的子空间为** V_2**，求** V_1+V_2 **和** $V_1 \cap V_2$.

极大线性无关组的求解（Cont'd）

解法 1　V_1+V_2 是由 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 和 $\boldsymbol{\beta}_i$ 生成的, 因此只要求出这 6 个向量的极大无关组即可. 将这 6 个向量按列分块方式拼成矩阵, 并用初等行变换将其化为阶梯形矩阵:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

故可取 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1$ 为 V_1+V_2 的基 (不唯一).

再来求 $V_1\cap V_2$ 的基. 首先注意到 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是 V_1 的基 (从上面的矩阵即可看出), 又不难验证 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 是 V_2 的基, V_2 中的向量可以表示为 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 的线性组合. 假设 $t_1\boldsymbol{\beta}_1+t_2\boldsymbol{\beta}_2$ 属于 V_1, 则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,t_1\boldsymbol{\beta}_1+t_2\boldsymbol{\beta}_2$ 和向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 的秩相等 (因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是 V_1 的基). 因此, 我们可以用矩阵方法来求出参数 t_1,t_2. 注意到

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -t_1+t_2 \\ 0 & 1 & t_1-t_2 \\ -1 & 2 & t_1-3t_2 \\ 0 & 1 & t_1-t_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -t_1+t_2 \\ 0 & 1 & t_1-t_2 \\ 0 & 2 & -2t_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -t_1+t_2 \\ 0 & 1 & t_1-t_2 \\ 0 & 0 & -2t_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

故可得 $t_1=0$, 所以 $V_1\cap V_2$ 的基可取为 $\boldsymbol{\beta}_2$.

线性空间的运算

运算的定义略，直和的定义、等价条件以及两种常用证明套路见 LALU，此处不再赘述.

例 (历年卷判断题组合)

1. 设 V, W 是数域 F 上的线性空间，则 $V \cup W$ 是线性空间.
2. 设 U, V, W 为 V_0 关于数域 F 的线性空间，若 $U+V=U+W$，则 $V=W$.
3. 设 W_1, W_2 是线性空间 V 的两个子空间，$W_1 \cup W_2 = W_1 + W_2$ 当且仅当 $W_1 \subseteq W_2$ 或 $W_2 \subseteq W_1$.
4. 对任意实数域 $\mathbf{R}$ 上线性空间 V，都能找到有限个 V 的非平凡子空间 $V_1, \ldots, V_m$ 使得 $V_1 \cup \cdots \cup V_m$.

线性空间的运算

运算的定义略，直和的定义、等价条件以及两种常用证明套路见 LALU，此处不再赘述.

例 (历年卷判断题组合)

1. 设 V, W 是数域 F 上的线性空间，则 $V \cup W$ 是线性空间.
2. 设 U, V, W 为 V_0 关于数域 F 的线性空间，若 $U+V=U+W$，则 $V=W$.
3. 设 W_1, W_2 是线性空间 V 的两个子空间，$W_1 \cup W_2 = W_1 + W_2$ 当且仅当 $W_1 \subseteq W_2$ 或 $W_2 \subseteq W_1$.
4. 对任意实数域 $\mathbf{R}$ 上线性空间 V，都能找到有限个 V 的非平凡子空间 $V_1, \ldots, V_m$ 使得 $V_1 \cup \cdots \cup V_m$.

例

在数域 $\mathbf{F}$ 上，已知 V_1, V_2 分别为方程组 $x_1+x_2+\cdots+x_n=0$ 与 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 的解空间. 证明：$\mathbf{F}^n = V_1 \oplus V_2$.

过渡矩阵

定义

设 $B_1=\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\}$ 与 $B_2=\{\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n\}$ 是线性空间 $V(\mathbf{F})$ 的任意两组基，B_2 中每个基向量被基 B_1 表示为

$$(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

我们将这一矩阵称为即 B_1 变为基 B_2 的变换矩阵（或过渡矩阵）.

B_1 变为基 B_2 的过渡矩阵就是将 B_2 中的向量在 B_1 下的坐标按列排列.

1. 需要特别注意说的是 B_1 变为基 B_2 的过渡矩阵还是反过来；
2. 过渡矩阵是基与基之间的表示矩阵，一般向量组间不称；
3. 过渡矩阵一定是可逆矩阵，且 B_1 变为基 B_2 的过渡矩阵的逆矩阵就是 B_2 变为基 B_1 的过渡矩阵.

过渡矩阵（Cont'd）

定理

设 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 是线性无关的向量组，且

$$(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_s)=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)A$$

则向量组 $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_s$ 的秩等于矩阵 A 的秩.

这一定理利用坐标同构是非常显然的.

过渡矩阵（Cont’d）

定理

设 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 是线性无关的向量组，且

$$(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)A$$

则向量组 $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$ 的秩等于矩阵 A 的秩.

这一定理利用坐标同构是非常显然的.

定理

已知 $\beta_i = a_{1i}\alpha_1 + a_{2i}\alpha_2 + \cdots + a_{ni}\alpha_n$，$i = 1, 2, \ldots, n$，且 $A = (a_{ij})$ 可逆，则 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 与 $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ 等价.

定理

设 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 是线性无关的向量组，且

$$(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_s)=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)A$$

则向量组 $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_s$ 的秩等于矩阵 A 的秩.

这一定理利用坐标同构是非常显然的.

定理

已知 $\beta_i=a_{1i}\alpha_1+a_{2i}\alpha_2+\cdots+a_{ni}\alpha_n$，$i=1,2,\ldots,n$，且 $A=(a_{ij})$ 可逆，则 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 与 $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n$ 等价.

例

已知 $\beta_1=\alpha_2+\alpha_3$，$\beta_2=\alpha_1+\alpha_3$，$\beta_3=\alpha_1+\alpha_2$，证明 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 与 β_1,β_2,β_3 等价.

定理 (基的选择对向量坐标的影响)

设线性空间 V 的两组基为 B_1 和 B_2，且基 B_1 到 B_2 的变换矩阵（过渡矩阵）为 A，如果 $\xi \in V(\mathbf{F})$ 在 B_1 和 B_2 下的坐标分别为 X 和 Y，则 $Y = A^{-1}X$.

例

设 $P^{-1}AP = B$，证明：A, B 分别属于同一特征值 λ 的特征向量 X 和 Y 满足 $Y = P^{-1}X$.

例

设矩阵 $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ -4 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$，$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 0 & 5 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$，且矩阵 B 满足 $AP = PB$. 求 B 的特征值与对应的特征子空间.

1. 线性映射的定义、性质与判断
2. 线性映射像空间、核空间的求解
3. 线性映射基本定理
4. 同构的定义、判断与等价条件
5. 线性映射矩阵表示

线性映射的定义

定义 (线性映射)

从线性空间 $V_1(\mathbf{F})$ 到 $V_2(\mathbf{F})$ 的一个映射 σ 是线性的，如果 $\forall\alpha,\beta\in V_1$ 和 $\forall\lambda,\mu\in\mathbf{F}$ 都有

$$\sigma(\lambda\alpha+\mu\beta)=\lambda\sigma(\alpha)+\mu\sigma(\beta). \tag{1}$$

从线性空间 V 到自身的线性映射 σ 也叫作 V 上的线性变换，在有的教材中也称为算子. 从线性空间 $V(\mathbf{F})$ 到域 $\mathbf{F}$ 的线性映射 f 叫作 V 上的线性泛函（或称线性函数，线性形式）.

为方便称呼，我们称对于 $V_1(\mathbf{F})$ 到 $V_2(\mathbf{F})$ 的线性映射 σ，$V_1(\mathbf{F})$ 是其出发空间，$V_2(\mathbf{F})$ 是其到达空间，也可简记为 $\sigma: V_1\to V_2$.

实际上，上述定义式可以分拆为以下二式：

$$\sigma(\alpha+\beta)=\sigma(\alpha)+\sigma(\beta) \qquad \text{(加性)}$$

$$\sigma(\lambda\alpha)=\lambda\sigma(\alpha) \qquad \text{(齐次性)}$$

验证线性映射是常见题型，一般而言使用拆分形式的定义验证较为便捷.

例

设 α_1, α_2 是线性空间 $V(\mathbf{F})$ 的一组基，$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 \in V$. 定义 $T(x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2) = r_1x_1\alpha_1 + r_2x_2\alpha_2$，其中 r_1, r_2 是域 $\mathbf{F}$ 中的两个常数. 证明：T 是 V 上的一个线性变换. 当 $V = \mathbf{R}^2$ 时，说明 T 的几何意义.

验证线性映射是常见题型，一般而言使用拆分形式的定义验证较为便捷.

例

设 α_1,α_2 是线性空间 $V(\mathbf{F})$ 的一组基，$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2\in V$. 定义 $T(x_1\alpha_1+x_2\alpha_2)=r_1x_1\alpha_1+r_2x_2\alpha_2$，其中 r_1,r_2 是域 $\mathbf{F}$ 中的两个常数. 证明：T 是 V 上的一个线性变换. 当 $V=\mathbf{R}^2$ 时，说明 T 的几何意义.

强调：线性映射 $\sigma:V_1\to V_2$ 满足的表达式 $\sigma(\alpha+\beta)=\sigma(\alpha)+\sigma(\beta)$ 中左边的加法是出发空间 V_1 中定义的加法运算，右边是到达空间 V_2 中定义的加法运算，二者并不是同一个加法，数乘也类似.

例

设 $\mathbf{R}^+$ 是所有正实数组成的集合，加法和数乘定义如下：$\forall a,b\in\mathbf{R}_+$，$k\in\mathbf{R}$：$a\oplus b=ab$，$k\odot a=a^k$，则 $\mathbf{R}^+$ 关于这一加法和数乘构成一个实线性空间. 求 $\mathbf{R}^+$ 的一组基.

定理 (线性映射的基本性质)

1. 设 σ 是线性空间 V_1 到 V_2 的线性映射，则 $\sigma(0_1) = 0_2$.
2. 设 σ 是线性空间 V_1 到 V_2 的线性映射，如果 V_1 中向量 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 线性相关，则 $\sigma(\alpha_1), \sigma(\alpha_2), \ldots, \sigma(\alpha_n)$ 也线性相关. 反之，$\sigma(\alpha_1), \sigma(\alpha_2), \ldots, \sigma(\alpha_n)$ 线性无关 $\Rightarrow \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 线性无关.

需要注意的是，线性映射可能将线性无关的向量组映射为线性相关的向量组，只有同构的时候才能保持线性无关性.

定义 (线性映射的加法与数乘)

设 $\sigma, \tau \in \mathscr{L}(V_1, V_2)$，规定 σ 与 τ 之和及 λ 与 σ 的数乘 $\lambda\sigma$ 分别为

$$(\sigma+\tau)(\alpha) = \sigma(\alpha)+\tau(\alpha),\ \forall \alpha \in V_1$$
$$(\lambda\sigma)(\alpha) = \lambda(\sigma(\alpha)),\ \forall \alpha \in V_1$$

定理

$\mathscr{L}(V_1, V_2)$ 与上述定义的线性映射加法和数乘构成域 $\mathbf{F}$ 上的线性空间.

除此之外，我们也定义了线性映射的复合与逆，它们也都是线性映射.

线性映射的像与核

定义

设 σ 是线性空间 $V_1(\mathbf{F})$ 到 $V_2(\mathbf{F})$ 的线性映射. V_1 的所有元素在 σ 下的像组成的集合

$$\sigma(V_1) = \{\beta \mid \beta = \sigma(\alpha),\ \ \alpha \in V_1\}$$

称为 σ 的像（或值域），记作 $\operatorname{im}\sigma$，或记作 $\operatorname{range}\sigma$.
V_2 的零元 0_2 在 σ 下的完全原像

$$\sigma^{-1}(0_2) = \{\alpha \mid \sigma(\alpha) = 0_2,\ \ \alpha \in V_1\}$$

称为 σ 的核（或零空间），记作 $\ker\sigma$，或记作 $\operatorname{null}\sigma$.

注意线性映射的像和核分别是 V_2 和 V_1 的子空间. 同样地，若 W_1 和 W_2 分别是 V_1 和 V_2 的子空间，则 $\sigma(W_1)$ 和 $\sigma^{-1}(W_2)$ 也分别是 V_2 和 V_1 的子空间.

线性映射的像与核（Cont'd）

请务必牢记，无论线性映射有多么复杂多么抽象，计算线性映射的像与核的基本的方法都是：

1. 设出发空间的一组基为 $B = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$，则像空间
$$\operatorname{im}\sigma = \sigma(V_1) = \operatorname{span}(\sigma(\alpha_1), \sigma(\alpha_2), \ldots, \sigma(\alpha_n)).$$
即线性映射在出发空间一组基下的像的线性扩张，解答时写出极大线性无关组然后扩张即可；
2. 核空间可以直接利用定义令 $\sigma(\alpha) = 0$，利用解线性方程组得到解集即为结果，注意也许表示为线性扩张的形式.

请务必牢记，无论线性映射有多么复杂多么抽象，计算线性映射的像与核的基本的方法都是：

1. 设出发空间的一组基为 $B=\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\}$，则像空间
$$\operatorname{im}\sigma=\sigma(V_1)=\operatorname{span}(\sigma(\alpha_1),\sigma(\alpha_2),\ldots,\sigma(\alpha_n)).$$
即线性映射在出发空间一组基下的像的线性扩张，解答时写出极大线性无关组然后扩张即可；
2. 核空间可以直接利用定义令 $\sigma(\alpha)=0$，利用解线性方程组得到解集即为结果，注意也许表示为线性扩张的形式.

例

设 $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\-1&2&1\\1&2&5\end{pmatrix}$ 为两个三维线性空间之间的线性映射 σ 对应的矩阵，求 σ 的像空间和核空间.

例 (2014-2015 期末)

设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是线性空间 V 的一组基，$T \in \mathscr{L}(V)$，且 $T(\alpha_1) = \alpha_1 + \alpha_2$，$T(\alpha_2) = \alpha_1 - \alpha_2$，$T(\alpha_3) = \alpha_1 + 2\alpha_2$. 求 T 的像空间和核空间，以及 T 的秩.

线性映射的像与核（Cont'd）

例 (2014-2015 期末)

设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是线性空间 V 的一组基，$T \in \mathscr{L}(V)$，且 $T(\alpha_1) = \alpha_1 + \alpha_2$，$T(\alpha_2) = \alpha_1 - \alpha_2$，$T(\alpha_3) = \alpha_1 + 2\alpha_2$. 求 T 的像空间和核空间，以及 T 的秩.

一般而言先求核空间更好，这样像空间的维数可以用维数公式确定.

例

设矩阵 $A \in \mathbf{F}^{m\times n}$，$A$ 的秩 $r(A) = r$，定义 $\mathbf{F}^{n\times p}$ 到 $\mathbf{F}^{m\times p}$ 的线性映射 σ，使得 $\forall X \in \mathbf{F}^{n\times p}$，$\sigma(X) = AX$. 求 σ 核空间的维数.

线性映射的确定

定理 (线性映射唯一确定)

已知线性映射 $\sigma,\tau \in \mathscr{L}(V_1,V_2)$，且有 V_1 的基 $B=\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\}$. 若 $\sigma(\alpha_i)=\tau(\alpha_i)$, $\forall \alpha_i \in B$，则有 $\sigma=\tau$.

即映射在一组基上的像确定了，则映射是唯一的（极好的性质）.

线性映射的确定

定理 (线性映射唯一确定)

已知线性映射 $\sigma,\tau\in\mathscr{L}(V_1,V_2)$，且有 V_1 的基 $B=\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\}$. 若 $\sigma(\alpha_i)=\tau(\alpha_i)$，$\forall\alpha_i\in B$，则有 $\sigma=\tau$.

即映射在一组基上的像确定了，则映射是唯一的（极好的性质）.

定理 (线性映射构造)

设 $B=\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\}$ 是 V_1 的基，$S=\{\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n\}$ 是 V_2 中任意 n 个向量，则存在唯一的 $\sigma\in\mathscr{L}(V_1,V_2)$ 使得 $\sigma(\alpha_i)=\beta_i$，$i=1,2,\ldots,n$.

很多时候 B 只需要是一组线性无关向量组即可构造出线性映射.

例 (经典判断题)

1. 给定线性空间 V 的非零向量 v 和线性空间 W 的向量 w，总存在线性映射 $T:V\to W$ 使得 $T(v)=w$.
2. 线性空间 V 的任何子空间 W 都是某个映射 $T:V\to V$ 的核.

线性映射的确定（Cont'd）

例

是否存在 $\mathbf{R}^2$ 到 $\mathbf{R}^3$ 的线性映射 σ 使得
$\sigma(1,0)=(1,0,0)$, $\sigma(0,1)=(0,1,0)$, $\sigma(1,1)=(0,0,1)$?

1. 如果我们发现题目给定的条件无法满足将出发空间零元映射至到达空间零元则一定不是线性映射；
2. 如果我们发现映射将线性相关的向量组映射到了线性无关向量组，则一定不是线性映射；
3. 一定不存在从低维线性空间到高维线性空间的满射.
4. 如果题目给定的映射不违反上述线性映射的必要条件，那我们可以按照上页定理构造出相应的映射.

线性映射基本定理

定理 (线性映射基本定理)

设 $\sigma \in \mathscr{L}(V_1, V_2)$，若 $\dim V_1 = n$，则 $r(\sigma) + \dim\ker\sigma = n$.

例 (经典判断题)

1. 若线性映射 $T: V \to W$ 的核是 K，则 $\dim V = \dim W + \dim K$.
2. 已知 $\sigma \in L(V,\ V)$，$\dim V = n$，则由 $r(\sigma) + \dim(\ker\sigma) = n$ 可得 $\mathrm{Im}\sigma + \ker\sigma = V$.

线性映射基本定理

定理 (线性映射基本定理)

设 $\sigma \in \mathscr{L}(V_1, V_2)$，若 $\dim V_1 = n$，则 $r(\sigma) + \dim\ker\sigma = n$.

例 (经典判断题)

1. 若线性映射 $T: V \to W$ 的核是 K，则 $\dim V = \dim W + \dim K$.
2. 已知 $\sigma \in L(V,\ V)$，$\dim V = n$，则由 $r(\sigma) + \dim(\ker\sigma) = n$ 可得 $\mathrm{Im}\sigma + \ker\sigma = V$.

定理证明与结果都非常重要，下学期商空间会有更深入的理解. 证明思想为设小扩大，下面是一个思想类似的例子:

例

已知 A, B 分别 $s \times k$ 和 $k \times n$ 矩阵，X 是 $n \times 1$ 的列向量. 证明：所有满足 $ABX = 0$ 的 BX 构成一个线性空间 V，且 $\dim V = r(B) - r(AB)$.

线性映射基本定理（Cont'd）

线性映射基本定理一个重要应用是后续介绍的齐次线性方程组解空间维数，另一个则是可以直接导出相抵标准形：

定理 (相抵标准形)

设 $\sigma \in \mathscr{L}(V_1, V_2)$，则存在 V_1, V_2 的两组基 B_1, B_2，使得 σ 在 B_1, B_2 下的矩阵为相抵标准形.

证明.

我们取 σ 核空间一组基 $\alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_n$，将其扩充为 V 的一组基 $B_1' = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.

$$\sigma(\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \alpha_n) = (\sigma(\alpha_1), \ldots, \sigma(\alpha_r), \beta_{r+1}, \ldots, \beta_m)\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}.$$

□

同构

定义 (同构)

如果由线性空间 $V_1(\mathbf{F})$ 到 $V_2(\mathbf{F})$ 存在一个线性双射 σ，则称 $V_1(\mathbf{F})$ 和 $V_2(\mathbf{F})$ 是同构的，记作 $V_1(\mathbf{F}) \cong V_2(\mathbf{F})$. σ 称为 $V_1(\mathbf{F})$ 到 $V_2(\mathbf{F})$ 的一个同构映射.

1. 同构是一种等价关系；
2. 对同构映射 σ，V_1 中向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 与 V_2 中对应的 $\sigma(\alpha_1), \sigma(\alpha_2), \ldots, \sigma(\alpha_m)$ 有相同的线性相关性.

经典的例子：

1. 坐标映射；
2. 若 $\dim V_1(\mathbf{F}) = m$，$\dim V_2(\mathbf{F}) = n$，则 $\mathscr{L}(V_1, V_2) \cong \mathbf{F}^{m\times n}$.

定理 (同构的等价条件)

两个线性空间 $V_1(\mathbf{F})$ 和 $V_2(\mathbf{F})$ 同构的充要条件是它们的维数相等.

例 (2019-2020 期末拓展)

判断：复数集 $\mathbf{C}$ 关于复数的加法与复数的乘法构成的复数域上的线性空间与 $\mathbf{C}^2$ 同构（若同构可以进一步思考同构映射的构造）.

同构（Cont'd）

定理 (同构的等价条件)

两个线性空间 $V_1(\mathbf{F})$ 和 $V_2(\mathbf{F})$ 同构的充要条件是它们的维数相等.

例 (2019-2020 期末拓展)

判断：复数集 $\mathbf{C}$ 关于复数的加法与复数的乘法构成的复数域上的线性空间与 $\mathbf{C}^2$ 同构（若同构可以进一步思考同构映射的构造）.

例 (2009-2010 期末)

设 $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ 是 V 的一组基，$T: V \to V$ 是线性变换，$T(v_1) = v_2, T(v_2) = v_3, \ldots, T(v_{n-1}) = v_n, T(v_n) = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n$. 求 T 关于 β 的矩阵表示. 以及，在什么条件下 T 是同构？

定理 (同构的等价条件)

两个线性空间 $V_1(\mathbf{F})$ 和 $V_2(\mathbf{F})$ 同构的充要条件是它们的维数相等.

例 (2019-2020 期末拓展)

判断：复数集 $\mathbf{C}$ 关于复数的加法与复数的乘法构成的复数域上的线性空间与 $\mathbf{C}^2$ 同构（若同构可以进一步思考同构映射的构造）.

例 (2009-2010 期末)

设 $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ 是 V 的一组基，$T: V \to V$ 是线性变换，$T(v_1) = v_2, T(v_2) = v_3, \ldots, T(v_{n-1}) = v_n, T(v_n) = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n$. 求 T 关于 β 的矩阵表示. 以及，在什么条件下 T 是同构？

例 (2012-2013 期末)

判断：若有限维线性空间 V 的线性映射 $T: V \to V$ 是可对角化的，则 T 是同构.

例 (2010-2011 期末改编，2022-2023 期中)

设

$$P=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad Q=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},$$

定义 $\mathbf{R}^{3\times 2}$ 上映射 σ:

$$\sigma(A)=PAQ.$$

1. 验证 σ 是线性映射;
2. 求 $\operatorname{im}\sigma$ 和 $\ker\sigma$;
3. 求 $\mathbf{R}^{3\times 2}$ 的两组基 B_1,B_2，使得 σ 在 B_1,B_2 下的矩阵为对角矩阵.

例

设 $V = \mathbf{M}_2(\mathbf{R})$ 是 $\mathbf{R}$ 上所有 2×2 矩阵构成的实数域上的线性空间. 已知

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} (\lambda \in \mathbf{R}),\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. 证明：$\varphi(X) = AXB$ 为 V 上的线性变换；
2. 证明：$\lambda \neq -1$ 时，φ 为可逆线性变换；
3. $\lambda = -1$ 时，求 φ 的像空间和核空间；
4. 将 3 中的值域扩充为 V 的一组基，并求 φ 在这组基下的矩阵.

例 (2011-2012 期末)

记线性映射 σ 的核为 ker σ，像为 im σ. 设 $\sigma_1, \sigma_2 : V \to V$ 是线性映射. 证明:

1. $\ker \sigma_1 \subseteq \ker (\sigma_2 \circ \sigma_1)$.
2. $\mathrm{im}\,(\sigma_2 \circ \sigma_1) \subseteq \mathrm{im}\ \sigma_2$.

例 (2011-2012 期末)

设 $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ 是线性空间 V 的一组基，线性映射 $\sigma : V \to V$ 定义如下：$\sigma(v_1) = v_2 + v_3, \sigma(v_2) = v_3, \sigma(v_3) = v_1 - v_2$.

1. 给出 σ 关于基 B 的矩阵表示.
2. 证明 $B' = \{v_2, v_3 + v_1, v_1 - v_2\}$ 是 V 的另一组基.
3. 给出 σ 关于基 B' 的矩阵表示.

1. 矩阵的加法、数乘、乘法、逆、转置等基本运算及其性质
2. 分块矩阵的性质
3. 初等变换与相抵标准形，矩阵秩的定义，秩不等式及其应用

概述

本节不再赘述矩阵加法、数乘、乘法、逆、转置、分块等基本运算与性质（以及与线性映射的联系），这些都在 LALU 有详细总结（还有对角矩阵和三角矩阵的很好的乘积、可逆性质需要了解），这里主要给出习题以及一些需要特别强调的性质.

例

已知矩阵 $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ h & x & y \end{pmatrix}$ 的逆是 $A^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}$,
$B=\begin{pmatrix} a-2b & b-3c & -c \\ d-2e & e-3f & -f \\ h-2x & x-3y & -y \end{pmatrix}$. 求矩阵 X 满足:

$$X+\left(B(A^{\mathsf{T}}B^2)^{-1}A^{\mathsf{T}}\right)^{-1}=X\left(A^2(B^{\mathsf{T}}A)^{-1}B^{\mathsf{T}}\right)^{-1}(A+B)$$

转置

强调两点：求幂和对称性（(反）对称矩阵详见 LALU）

例

1. 设 $\alpha=(1,-1,2)^\mathsf{T}$，$\beta=(3,1,-2)^\mathsf{T}$，$A=\alpha\beta^\mathsf{T}$，求 A^n.
2. 设 α,β 为三维列向量，且 $\alpha\beta^\mathsf{T}=\begin{pmatrix}-1&2&1\\1&-2&-1\\2&-4&-2\end{pmatrix}$，求 $\alpha^\mathsf{T}\beta$.
3. 设 A 为 n 阶实矩阵，且 $A^\mathsf{T}A=O$. 证明：$A=O$.
4. 求矩阵 $\begin{pmatrix}a&b&c&d\\-b&a&d&-c\\-c&-d&a&b\\-d&c&-b&a\end{pmatrix}$ 的逆.

例 (2012-2013 期末)

判断：若 A,B 是对称矩阵，则 AB 也是对称矩阵.

定义

将单位矩阵 E 做一次初等变换得到的矩阵称为初等矩阵，与三种初等行、列变换对应的三类初等矩阵为：

1. 将单位矩阵第 i 行（或列）乘 c，得到初等倍乘矩阵 $E_i(c)$；
2. 将单位矩阵第 i 行乘 c 加到第 j 行，或将第 j 列乘 c 加到第 i 列，得到初等倍加矩阵 $E_{ij}(c)$；
3. 将单位矩阵第 i,j 行（或列）对换，得到初等对换矩阵 E_{ij}.

1. 倍加变化请注意 i 和 j 在行列变换的情况下的不同，行变换是第 i 行乘 c 加到第 j 行，列变换是第 j 列乘 c 加到第 i 列；
2. 可逆：$E_i^{-1}(c) = E_i\left(\dfrac{1}{c}\right)$，$E_{ij}^{-1}(c) = E_{ij}(-c)$，$E_{ij}^{-1} = E_{ij}$.
3. 转置：$E_i^{\mathsf{T}}(c) = E_i(c)$，$E_{ij}^{\mathsf{T}}(c) = E_{ji}(c)$，$E_{ij}^{\mathsf{T}} = E_{ij}$.

定理 (初等变换最重要的两个定理)

1. 初等变换不改变矩阵的秩（包括行变换和列变换）.
2. 任意可逆矩阵都可以被表示为若干个初等矩阵的乘积.

大量的结论可以从这两个定理推出，例如相抵标准形，$|AB| = |A||B|$，以及初等变换求逆的方法等.（注意初等矩阵行列式（注意初等矩阵不分行列，左乘右乘区分初等行列变换）：$|E_{ij}| = -1$，$|E_i(c)| = c$，$|E_{ij}(k)| = 1$）

定理 (初等变换最重要的两个定理)

1. 初等变换不改变矩阵的秩（包括行变换和列变换）.
2. 任意可逆矩阵都可以被表示为若干个初等矩阵的乘积.

大量的结论可以从这两个定理推出，例如相抵标准形，$|AB| = |A||B|$，以及初等变换求逆的方法等.（注意初等矩阵行列式（注意初等矩阵不分行列，左乘右乘区分初等行列变换）：$|E_{ij}| = -1$，$|E_i(c)| = c$，$|E_{ij}(k)| = 1$）

例

设 A 为 n 阶可逆矩阵，证明：只用倍加变换，可以将 A 变成 $\mathrm{diag}(1, \cdots, 1, |A|)$.

教材第四章补充题 6-8 也是此类型的题目.

矩阵的逆求解介绍了三种方法：解方程，初等变换（矩阵方程思想也来源于此）和伴随矩阵，其中后两者更为常用，请务必掌握，但过于平凡此处不再赘述. 下面介绍一些不那么平凡的问题，特别是更常用的求逆技术：凑因子法.

矩阵的逆

矩阵的逆求解介绍了三种方法：解方程，初等变换（矩阵方程思想也来源于此）和伴随矩阵，其中后两者更为常用，请务必掌握，但过于平凡此处不再赘述. 下面介绍一些不那么平凡的问题，特别是更常用的求逆技术：凑因子法.

例

设 A 为 n 阶可逆矩阵，A 的每行各元素之和都等于 k，证明：

1. **$k \neq 0$ 且 A^{-1} 的每行各元素之和都等于 $\dfrac{1}{k}$；**
2. **A^i（其中 i 为正整数）每行元素之和为 k^i（这一性质不要求可逆）.**

本题有关于每行元素相同的矩阵，此类矩阵有特定的特征向量 $(1, \cdots, 1)^{\mathsf{T}}$，特征值为 k.

矩阵的逆

矩阵的逆求解介绍了三种方法：解方程，初等变换（矩阵方程思想也来源于此）和伴随矩阵，其中后两者更为常用，请务必掌握，但过于平凡此处不再赘述. 下面介绍一些不那么平凡的问题，特别是更常用的求逆技术：凑因子法.

例

设 A 为 n 阶可逆矩阵，A 的每行各元素之和都等于 k，证明：

1. $k \neq 0$ 且 A^{-1} 的每行各元素之和都等于 $\dfrac{1}{k}$；
2. A^i（其中 i 为正整数）每行元素之和为 k^i（这一性质不要求可逆）.

本题有关于每行元素相同的矩阵，此类矩阵有特定的特征向量 $(1, \cdots, 1)^{\mathsf{T}}$，特征值为 k.

例 (2018-2019 期末)

设 n 阶方阵 A 的每一行元素之和是 10，则 $2A^3 + A + 9E_n$ 的每一行元素之和是 2019.

凑因子法：利用给出的矩阵多项式或者表达式构造出待求矩阵乘以另一个矩阵等于单位矩阵的常数倍的形式，然后就可以说明可逆性.

例

设方阵 A 满足 $A^2-A-2E=O$，证明：

1. **A 和 $E-A$ 都是可逆矩阵，并求它们的逆矩阵；**
2. **$A+E$ 和 $A-2E$ 不可能同时可逆.**

凑因子法：利用给出的矩阵多项式或者表达式构造出待求矩阵乘以另一个矩阵等于单位矩阵的常数倍的形式，然后就可以说明可逆性.

例

设方阵 A 满足 $A^2-A-2E=O$，证明：

1. A 和 $E-A$ 都是可逆矩阵，并求它们的逆矩阵；
2. $A+E$ 和 $A-2E$ 不可能同时可逆.

例

若 A,B 为两个 n 阶矩阵且满足 $A+B=AB$，证明：

1. $A-E$ 和 $B-E$ 均可逆；
2. $AB=BA$；
3. $r(A)=r(B)$.

上例非常经典，事实上对称性蕴含着 $AB=BA$，而满足 $AB=BA$ 的两个矩阵在特征值还有更多好的性质.

矩阵的逆（Cont'd）

除了上述凑因子法，其它方法在 LALU 上也有介绍，了解即可. 这里我们再介绍一个提逆思想（考虑矩阵运算性质，转加法为乘法）:

除了上述凑因子法，其它方法在 LALU 上也有介绍，了解即可. 这里我们再介绍一个提逆思想（考虑矩阵运算性质，转加法为乘法）：

例

设 $A, B, A+B$ 都是可逆矩阵，求证：$A^{-1}+B^{-1}$ 也是可逆矩阵.

矩阵的逆（Cont'd）

除了上述凑因子法，其它方法在 LALU 上也有介绍，了解即可. 这里我们再介绍一个提逆思想（考虑矩阵运算性质，转加法为乘法）:

例

设 $A,B,A+B$ 都是可逆矩阵，求证：$A^{-1}+B^{-1}$ 也是可逆矩阵.

证明.

$A^{-1}+B^{-1}=A^{-1}(A+B)B^{-1}$，由此可知其逆为 $B(A+B)^{-1}A$. □

除了上述凑因子法，其它方法在 LALU 上也有介绍，了解即可. 这里我们再介绍一个提逆思想（考虑矩阵运算性质，转加法为乘法）:

例

设 $A,B,A+B$ **都是可逆矩阵，求证：** $A^{-1}+B^{-1}$ **也是可逆矩阵.**

证明.

$A^{-1}+B^{-1}=A^{-1}(A+B)B^{-1}$，由此可知其逆为 $B(A+B)^{-1}A$. □

例 (2019-2020 期末)

1. **设** A **为** n **阶矩阵且** $E-A$ **可逆，证明：** A **与** $(E-A)^{-1}$ **相乘可交换；**
2. **设** A **为** n **阶实反对称矩阵且** $E+A$ **可逆，证明：** $(E-A)(E+A)^{-1}$ **为正交矩阵，且** -1 **不为其特征值.**

可逆矩阵等价条件

以下定理在解决问题时非常重要，请务必掌握：

定理 (可逆等价条件)

设 $A \in \mathbf{M}_n(\mathbf{F})$，则下列命题等价：

1. A 可逆（线性映射可逆、单射 + 满射）;
2. $r(A) = n$;
3. A 的 n 个行（列）向量线性无关；
4. 齐次线性方程组 $AX = 0$ 只有零解；
5. $|A| \neq 0$;
6. A 的特征值没有 0.

可逆矩阵等价条件

以下定理在解决问题时非常重要，请务必掌握：

定理 (可逆等价条件)

设 $A \in \mathbf{M}_n(\mathbf{F})$，则下列命题等价：

1. A 可逆（线性映射可逆、单射 + 满射）；
2. $r(A) = n$；
3. A 的 n 个行（列）向量线性无关；
4. 齐次线性方程组 $AX = 0$ 只有零解；
5. $|A| \neq 0$；
6. A 的特征值没有 0.

例 (2019-2020 期末)

判断：设 $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ 是任意 $n+1$ 个 n 阶矩阵，必存在不全为 0 的实数 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n+1}$，使得矩阵 $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \cdots + \lambda_{n+1} A_{n+1}$ 不可逆.

相抵标准形

定理

设 A 是 $m\times n$ 矩阵，则存在可逆矩阵 P 和 Q，使得

$$PAQ=\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}=U_r$$

其中 E_r 表示 r 阶单位矩阵，$r=r(A)$.

1. 从线性映射的角度来看，我们能找到一组基使得任意线性映射在这组基下的矩阵为相抵标准形，这是线性映射基本定理的应用；从矩阵角度看，相抵标准形是初等变换的结果，联系两种视角，实际上初等变换就对应于基的对应的变换.
2. 同形状矩阵相抵的三个等价定义：可由初等变换互相转化，秩相等（秩是相抵不变量），且 A 与 B 相抵 $\iff$ 存在可逆矩阵 P 和 Q 使得 $PAQ=B$.，并且相抵是矩阵的一个等价关系，这一等价关系将 $\mathbf{F}^{m\times n}$ 中元素按秩分类.

相抵标准形分解

第一种分解是非常自然的分解，将来相似、相合标准形也会基于这一思想进行分解. 我们知道，对于矩阵 A 满足 $r(A)=r$，则存在可逆矩阵 P' 和 Q'，使得

$$P'AQ'=\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix},$$

因此我们可以得到 $A=P'^{-1}\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}Q'^{-1}$，即 A 可以分解成一个可逆矩阵、一个相抵标准形和另一个可逆矩阵的乘积. 记 $P=P'^{-1}$，$Q=Q'^{-1}$，则 $A=P\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}Q$.

相抵标准形分解（Cont’d）

例

设 A 为 n 阶方阵，证明：存在可逆矩阵 B 和幂等矩阵 C 使得 $A = BC$.

例

设 A 为 n 阶方阵，证明：存在可逆矩阵 B 和幂等矩阵 C 使得 $A=BC$.

根据相抵标准形分解，设 $r(A)=r$，有 $A=P\begin{pmatrix}E_r & O\\ O & O\end{pmatrix}Q$，其中 P 和 Q 可逆. 回忆矩阵求幂的技巧，我们可以取 $C=Q^{-1}\begin{pmatrix}E_r & O\\ O & O\end{pmatrix}Q$，则 $C^2=C$（中间的 QQ^{-1} 会抵消，相抵标准形幂等），然后令 $B=PQ$ 即可.

相抵标准形分解（Cont'd）

例

设 A 为 n 阶方阵，证明：存在可逆矩阵 B 和幂等矩阵 C 使得 $A=BC$.

根据相抵标准形分解，设 $r(A)=r$，有 $A=P\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}Q$，其中 P 和 Q 可逆. 回忆矩阵求幂的技巧，我们可以取 $C=Q^{-1}\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}Q$，则 $C^2=C$（中间的 QQ^{-1} 会抵消，相抵标准形幂等），然后令 $B=PQ$ 即可.

例

1. 设 $A,B\in\mathbf{M}_n(\mathbf{F})$，$r(A)+r(B)\leqslant n$，证明：存在可逆矩阵 M，使得 $AMB=O$.
2. 设 A 是 $m\times n$ 矩阵（$m\leqslant n$），$r(A)=m$，证明：存在 $n\times m$ 矩阵 B 使得 $AB=E$.
3. 秩为 r 的 n 阶矩阵可以表示为 r 个秩为 1 的矩阵之和.

另一种分解技巧是更进一步的，此时我们不仅对原矩阵分解，还对相抵标准形做进一步的分解. 我们对 $s \times n$ 矩阵 $\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$ 有一种很重要的分解：

$$\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_r \\ O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_r & O \end{pmatrix}$$

由此我们可以知道任意一个非零矩阵都可以被分解成一个列满秩矩阵和一个行满秩矩阵的乘积：

$$A = P \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} Q = P \begin{pmatrix} E_r \\ O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_r & O \end{pmatrix} Q$$

记 $P_1 = P \begin{pmatrix} E_r \\ O \end{pmatrix}$，$Q_1 = \begin{pmatrix} E_r & O \end{pmatrix} Q$，则 $A = P_1 Q_1$，且 P_1 和 Q_1 分别为列满秩、行满秩矩阵.

相抵标准形分解（Cont'd）

例 (多个历年题组合)

1. 设 B 是 3×1 矩阵，C 是 1×3 矩阵，证明：$r(BC)\leq 1$；反之，若 A 是秩为 1 的 3×3 矩阵，证明：存在 3×1 矩阵 B 和 1×3 矩阵 C，使得 $A=BC$.
2. 设 A 是域 $\mathbf{F}$ 上的 $m\times n$ 矩阵，A 的秩 $r(A)=1$.
   1. 证明存在（列向量）$X\in\mathbf{F^m}$ 和 $Y\in\mathbf{F^n}$ 使得 $A=XY^{\mathrm{T}}$, 其中 Y^{T} 是 Y 的转置.
   2. X 和 Y 是否唯一?
3. 设 A 为 n 阶矩阵，满足 $r(A)=1$，A 主对角线上元素之和为 1，证明：$A^2=A$.

最后一个例子实际上表明：秩为 1 且迹为 1 的矩阵一定是幂等矩阵.

例 (多个历年题组合)

1. 设 B 是 3×1 矩阵，C 是 1×3 矩阵，证明：$r(BC)\leq 1$；反之，若 A 是秩为 1 的 3×3 矩阵，证明：存在 3×1 矩阵 B 和 1×3 矩阵 C，使得 $A=BC$.
2. 设 A 是域 $\mathbf{F}$ 上的 $m\times n$ 矩阵，A 的秩 $r(A)=1$.
   1. 证明存在（列向量）$X\in\mathbf{F}^{\mathbf{m}}$ 和 $Y\in\mathbf{F}^{\mathbf{n}}$ 使得 $A=XY^{\mathrm{T}}$, 其中 Y^{T} 是 Y 的转置.
   2. X 和 Y 是否唯一?
3. 设 A 为 n 阶矩阵，满足 $r(A)=1$，A 主对角线上元素之和为 1，证明：$A^2=A$.

最后一个例子实际上表明：秩为 1 且迹为 1 的矩阵一定是幂等矩阵.

例

已知 n 阶矩阵 A 的秩为 1，证明：$A^k=\mathrm{tr}(A)^{k-1}A$.

分块矩阵

基本内容不再回顾，注意与普通矩阵的区别：乘法大小块都要匹配，转置大小块都要转置，注意分块对角与分块三角矩阵性质类似.

例

$$A=\begin{pmatrix}1&2&0&0&0\\2&5&0&0&0\\0&0&-2&1&0\\0&0&0&-2&1\\0&0&0&0&-2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\-1&2&3&0\\1&2&0&4\\0&1&2&4\\0&0&1&4\end{pmatrix},\ A^2,\ AB,\ A^{\mathsf{T}},\ A^{-1}.$$

分块矩阵

基本内容不再回顾，注意与普通矩阵的区别：乘法大小块都要匹配，转置大小块都要转置，注意分块对角与分块三角矩阵性质类似.

例

$$A=\begin{pmatrix}1&2&0&0&0\\2&5&0&0&0\\0&0&-2&1&0\\0&0&0&-2&1\\0&0&0&0&-2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\-1&2&3&0\\1&2&0&4\\0&1&2&4\\0&0&1&4\end{pmatrix},\quad A^2,\ AB,\ A^{\mathsf{T}},\ A^{-1}.$$

我们还需掌握两种常用分块方法，要避免使用错误的分块方法.

例

B 为 n 阶可逆矩阵，$C=\begin{pmatrix}1&2&\cdots&n\\0&0&\cdots&0\\0&0&\cdots&0\end{pmatrix}$，求一矩阵 A 使 $A\begin{pmatrix}B\\C\end{pmatrix}=E_n$.

分块矩阵初等变换属于小字部分，考试一般不会考察，因此这里也不讲解. 我们需要掌握如下例子：

例

设 n 阶矩阵 A 分块为 $A=\begin{pmatrix} B & O \\ C & D \end{pmatrix}$，其中 B,D 分别为 k 阶、m 阶矩阵，求 A 可逆的充要条件，并求可逆时的 A^{-1}.

分块矩阵初等变换属于小字部分，考试一般不会考察，因此这里也不讲解. 我们需要掌握如下例子：

例

设 n 阶矩阵 A 分块为 $A=\begin{pmatrix} B & O \\ C & D \end{pmatrix}$，其中 B,D 分别为 k 阶、m 阶矩阵，求 A 可逆的充要条件，并求可逆时的 A^{-1}.

例 (2014-2015 期末)

判断：设 A 和 B 都是可逆矩阵，那么矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & B \\ A & C \end{pmatrix}$ 也是可逆矩阵.

例 (2014-2015 期末)

计算矩阵 $B=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\-1&1&0&0&0\\0&0&1&-1&-1\\0&0&-2&-2&2\\0&0&-3&-3&3\end{pmatrix}^n$，其中 n 是自然数.

例 (2014-2015 期末)

计算矩阵 $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & 3 \end{pmatrix}^n$，其中 n 是自然数.

本题首先需要看出分块计算更为简便，然后回忆矩阵求幂的几种方法（详细描述见 LALU. 这里只简单列举），如找规律（数学归纳）、利用幂零矩阵、利用初等变换、利用秩 1 矩阵、利用对角化等. 显然本题左上角直接视为初等变换一次的结果，右下角使用对角化方法即可.

例 (2014-2015 期末)

计算矩阵 $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & 3 \end{pmatrix}^n$，其中 n 是自然数.

本题首先需要看出分块计算更为简便，然后回忆矩阵求幂的几种方法（详细描述见 LALU. 这里只简单列举），如找规律（数学归纳）、利用幂零矩阵、利用初等变换、利用秩 1 矩阵、利用对角化等. 显然本题左上角直接视为初等变换一次的结果，右下角使用对角化方法即可.

例

已知 A 是数域 P 上的一个 2 阶方阵，且存在正整数 l 使得 $A^l = O$，证明：$A^2 = O$.

矩阵求幂的补充例子

例

设 A 为三阶矩阵，P 为三阶可逆矩阵，$P^{-1}AP=B$，其中 $P=\begin{pmatrix}0&2&-1\\1&1&2\\-1&-1&-1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&-1&0\\-1&0&0\end{pmatrix}$，求 A^{2024}.

例

已知数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 满足 $a_0=-1$，$b_0=3$，且

$$\begin{cases}a_n=3a_{n-1}+b_{n-1}+2^{n-1}\\ b_n=2a_{n-1}+4b_{n-1}+2^n\end{cases}$$

求 $\{a_n\},\{b_n\}$ 的通项公式.

定理

1. 与主对角元两两互异的对角矩阵可交换的方阵只能是对角矩阵；
2. 准对角矩阵 A 每个对角分块内对角线元素相同，但不同对角块之间不同，则与 A 可交换的矩阵只能是准对角矩阵；
3. 与所有 n 级可逆矩阵可交换的矩阵为数量矩阵；
4. 与所有 n 级矩阵可交换的矩阵为数量矩阵.

上述定理的证明应当了解. 除此之外，与特定方阵可交换的全体方阵构成矩阵空间的子空间；除此之外，对于具体矩阵的可交换性问题，直接设出未知矩阵暴力计算解方程组即可，相应简化的方法和例子都在 LALU 上.

矩阵的秩

请自行回顾矩阵秩的三种等价定义（蕴含秩 = 行秩 = 列秩 = 行列式秩）.

定理

线性映射是单射当且仅当其矩阵表示为列满秩矩阵，线性映射是满射当且仅当其矩阵表示为行满秩矩阵.

接下来介绍一个方便理解的工具：假设矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 与 $B=(b_{ij})_{n\times l}$ 相乘，我们有如下结论：

1. 乘积的第 k 列等于 A 乘以 B 的第 k 列，乘积的第 j 行等于 A 的第 j 行乘以 B.

例

设 A,B 都是由非负实数组成的矩阵且 AB 有一行等于 0，证明：或者 A 有一行为 0，或者 B 有一行为 0.

2. 乘积的每一列都是矩阵 A 各列的线性组合，每一行都是矩阵 B 各行的线性组合.

矩阵的秩（Cont’d）

下面是一些常见的秩等式与不等式：

1. $r(A)=r(PA)=r(AQ)=r(PAQ)$，其中 P,Q 可逆.
2.
   1. $r\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}=r(A)+r(B)$.
   2. $r(A)+r(B)+r(D)\geqslant r\begin{pmatrix} A & D \\ O & B \end{pmatrix}\geqslant r(A)+r(B)$，$r(A)+r(B)+r(C)\geqslant r\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}\geqslant r(A)+r(B)$.
3. $|r(A)-r(B)|\leqslant r(A\pm B)\leqslant r(A)+r(B)$.
4. $r(AB)\leqslant \min\{r(A),r(B)\}$.
5. $r(A)=r(A^{\mathsf{T}})=r(AA^{\mathsf{T}})=r(A^{\mathsf{T}}A)$. 第二个等号需要实矩阵作为前提.
6. （Sylvester 不等式）$A\in \mathbf{F}^{s\times n}$，$B\in \mathbf{F}^{n\times m}$，则 $r(AB)\geqslant r(A)+r(B)-n$（特例：当 $AB=O$ 时有 $r(A)+r(B)\leqslant n$）.
7. （Frobenius 不等式）$r(ABC)\geqslant r(AB)+r(BC)-r(B)$，特例：$A,B,C$ 相等的特殊情况：$r(A^3)\geqslant 2r(A^2)-r(A)$. 除此之外，若 $B=E_n$ 即单位矩阵时我们有 $r(AC)\geqslant r(A)+r(C)-n$. 因此只要证明了这一个不等式，很多的结论都只是其推论而已.

例

A 是 $s\times n$ 矩阵，B 是 A 前 m 行构成的矩阵，证明：$r(B)\geqslant r(A)+m-s$.

矩阵的秩（Cont'd）

例

A 是 $s\times n$ 矩阵，B 是 A 前 m 行构成的矩阵，证明：$r(B)\geqslant r(A)+m-s$.

例

1. 设 A,B 是两个 $m\times n$ 矩阵，且存在两个方阵 C,D 使得 $A=BC,B=AD$，证明：存在可逆矩阵 M 使得 $B=AM$.
2. 设 A 和 B 是两个 n 阶实方阵，证明：$r(A)=r(AB)$ 当且仅当存在 n 阶实方阵 C 使得 $A=ABC$.

例

A 是 $s\times n$ 矩阵，B 是 A 前 m 行构成的矩阵，证明：$r(B)\geqslant r(A)+m-s$.

例

1. 设 A,B 是两个 $m\times n$ 矩阵，且存在两个方阵 C,D 使得 $A=BC,B=AD$，证明：存在可逆矩阵 M 使得 $B=AM$.
2. 设 A 和 B 是两个 n 阶实方阵，证明：$r(A)=r(AB)$ 当且仅当存在 n 阶实方阵 C 使得 $A=ABC$.

例 (判断)

1. 若 A,B 为两个 n 阶矩阵，则 $r(A,AB)=r(A)$.
2. 若 A,B 为两个 n 阶矩阵，则 $r(A,BA)=r(A)$.
3. (2013-2014 期末) 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，I_m 是 m 阶单位阵，$B=(A|I_m)$ 是 A 的增广矩阵，则 B 的秩 $r(B)=m$.

1. 行列式的公理化定义、递归式定义
2. 行列式基本性质与简单运算
3. 伴随矩阵的定义与基本性质
4. Cramer 法则
5. 行列式定义矩阵的秩

公理化定义

定义 (行列式)

数域 $\mathbf{F}$ 上的一个 n 阶行列式是取值于 $\mathbf{F}$ 的 n 个 n 维向量 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n \in \mathbf{F}^n$ 的一个函数，且 $\forall \alpha_i,\beta_i \in \mathbf{F}^n$ 和 $\forall \lambda \in \mathbf{F}$，满足下列规则：

1. (齐性) $D(\alpha_1,\ldots,\lambda\alpha_i,\ldots,\alpha_n) = \lambda D(\alpha_1,\ldots,\alpha_i,\ldots,\alpha_n)$；
2. (加性，与 1 合称线性性)
   $D(\alpha_1,\ldots,\alpha_i+\beta_i,\ldots,\alpha_n) = D(\alpha_1,\ldots,\alpha_i,\ldots,\alpha_n) + D(\alpha_1,\ldots,\beta_i,\ldots,\alpha_n)$；
3. (反对称性)
   $D(\alpha_1,\ldots,\alpha_i,\ldots,\alpha_j,\ldots,\alpha_n) = -D(\alpha_1,\ldots,\alpha_j,\ldots,\alpha_i,\ldots,\alpha_n)$；
4. (规范性) $D(e_1,e_2,\ldots,e_n) = 1$.

例 (公理化定义可以导出的结论（行列可以换）)

1. 若行列式有一列为零向量，则行列式的值等于 0.
2. 若行列式有两列元素相同，则行列式的值等于 0.
3. 若行列式有两列元素成比例，则行列式的值等于 0.
4. 对行列式做倍加列变换，行列式的值不变.
5. 若 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 线性相关，则 $D(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)=0$.

例 (2013-2014 期末)

设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2$ 都是 4 维实线性空间 $\mathbf{R}^4$ 的列向量，已知 4 阶行列式 $|(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1)|=d_1, |(\beta_2,\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1)|=d_2$. 求下面 4 阶方阵的行列式.

1. $A=(3\alpha_1-100\alpha_2,7\alpha_2,\alpha_3,\beta_1)$.
2. $B=(5\beta_1+6\beta_2,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$.

递归式定义

定义 (递归式定义)

设 $D = |a_{ij}|_{n\times n}$，则

$$D = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \qquad j = 1,2,\ldots,n \tag{2}$$

$$D = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \qquad i = 1,2,\ldots,n \tag{3}$$

上面的定义用到了余子式和代数余子式，请特别注意定义和正负号.

例 (2019-2020 期末)

设 $D = |a_{ij}| = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 9 & 12 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 5 & 6 & 4 & 3 \end{vmatrix}$，求 $A_{41} + 2A_{42} + 3A_{44}$.

还有 k 行（列）展开的拉普拉斯定理，这里略去. 下面是一个很重要的性质：

定理

n 阶行列式 $D = |a_{ij}|_{n\times n}$ 的某一行（列）元素与另一行（列）相应元素的代数余子式的乘积之和等于 0，即

$$\sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{ki} = a_{1j}A_{1i} + a_{2j}A_{2i} + \cdots + a_{nj}A_{ni} = 0 \qquad j \neq i \tag{4}$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{jk}A_{ik} = a_{j1}A_{i1} + a_{j2}A_{i2} + \cdots + a_{jn}A_{in} = 0 \qquad j \neq i \tag{5}$$

行列式运算性质

例

设 $A,B\in\mathbf{F}^{n\times n}$，$k\in\mathbf{F}$，则

1. 一般情况下，$|A\pm B|\neq|A|\pm|B|$；
2. $|kA|=k^n|A|$；
3. $|AB|=|A||B|$，$|A^k|=|A|^k$；
4. A 可逆 $\iff$ $|A|\neq 0$；
5. $|A^{\mathsf{T}}|=|A|$；
6. 上、下三角矩阵行列式均为主对角线元素的乘积；
7. 若 A 可逆，则 $|A^{-1}|=|A|^{-1}$.
8. $\begin{vmatrix} A & O \\ O & B\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A & O \\ C & B\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A & D \\ O & B\end{vmatrix}=|A||B|$，$\begin{vmatrix} O & A \\ B & C\end{vmatrix}=(-1)^{kr}|A||B|$.

还有一些涉及分块矩阵初等变换的内容不再强调，一般不在考察范围.

行列式计算

我们略过所有技术性话题，因为从来没有考过. 我们只需知道三阶行列式常用逆序数、展开或初等变换等方法即可. 接下来回顾范德蒙行列式：

例 (Vandermonde 行列式)

证明：$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j - x_i).$

例

1. 设 V 是一个 n 维实线性空间，证明：存在 V 中的一个由可列无穷多个向量组成的向量组 $\{\alpha_i \mid i \in \mathbf{Z}_+\}$，使得其中任意 n 个向量组成的向量组都是 V 的一组基.
2. 证明以 0 为极限的实数数列全体构成的线性空间是无限维线性空间.

定理 (Cramer 法则)

令 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，称为系数行列式.

令 $D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\ldots,D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix}$.

1. 齐次线性方程组只有零解 $\iff D\neq 0$，有非零解（无穷多解）$\iff D=0$，即 $r(A)<n$；
2. 非齐次线性方程组有唯一解 $\iff D\neq 0$，此时 $x_i=\dfrac{D_i}{D}$ $(i=1,2,\ldots,n)$，当 $D=0$ 时，要么无解，要么无穷多解.

例

1. 设 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 为互不相等的实数，$b_1, b_2, \ldots, b_n$ 为任意给定的实数. 证明：存在唯一的 $n-1$ 次多项式，满足 $f(a_i) = b_i$，$i = 1, 2, \ldots, n$.
2. 证明：n 次多项式 $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x_1 + a_0 (a_n \neq 0)$ 最多只有 n 个互异的根.

例

设整系数线性方程组为 $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i (i = 1, 2, \cdots, n)$，则该方程对任意整数 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 都有整数解的充分必要条件为该方程组的系数行列式等于 ± 1.

伴随矩阵的题目经常出现，因为伴随矩阵的性质很丰富且简单，很适合于出题.

定义 (伴随矩阵)

称矩阵 $A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$ 为 A 的伴随矩阵，其中 A_{ij} 是元素 a_{ij} 的代数余子式.

我们要特别注意伴随矩阵代数余子式的下标与通常矩阵下标不一致，与转置下标一致.

伴随矩阵的性质

例

证明下列关于 n 阶矩阵 A 的伴随矩阵 A^* 的性质:

1. $AA^* = A^*A = |A|E$，若 A 可逆，则有
   $A^{-1} = |A|^{-1}A^*$，$A^* = |A|A^{-1}$，$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^* = |A|^{-1}A$.
2. $|A^*| = |A|^{n-1}$，无论 A 是否可逆.
3. $(AB)^* = B^*A^*$，$(A^\mathsf{T})^* = (A^*)^\mathsf{T}$，$(kA)^* = k^{n-1}A^*$，要求掌握 A 和 B 可逆时的证明，若不可逆则需要使用第二节习题 C 组中对角占优的推论证明.
4. A 可逆时，$(A^*)^* = |A|^{n-2}A$，$|(A^*)^*| = |A|^{(n-1)^2}$（本题结论可以推广到更多重的伴随矩阵）.
5. 对正整数 k，$(A^k)^* = (A^*)^k$.

核心是第一条，其它都是推论. 证明一般只需要掌握可逆的情况（除去第二点）.

伴随矩阵的性质（Cont’d）

例

1. 若 A 为幂等/幂零矩阵，则 A^* 也为幂等/幂零矩阵；
2. 若 A 为对称矩阵，则 A^* 也为对称矩阵（2013-2014 期末）；A 为反对称矩阵，则 A^* 为偶数阶时也为反对称矩阵，奇数阶时为对称矩阵；
3. 上（下）三角矩阵的伴随矩阵是上（下）三角矩阵（对角特例）.

伴随矩阵的性质（Cont’d）

例

1. 若 A 为幂等/幂零矩阵，则 A^* 也为幂等/幂零矩阵；
2. 若 A 为对称矩阵，则 A^* 也为对称矩阵（2013-2014 期末）；A 为反对称矩阵，则 A^* 为偶数阶时也为反对称矩阵，奇数阶时为对称矩阵；
3. 上（下）三角矩阵的伴随矩阵是上（下）三角矩阵（对角特例）.

例 (2022-2023 期末拓展)

设实方阵 A 的伴随矩阵 $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，且 $|A| > 0$，已知矩阵 B 满足 $AB = E + 3A$，求矩阵 B.

例

1. 若 A 为幂等/幂零矩阵，则 A^* 也为幂等/幂零矩阵；
2. 若 A 为对称矩阵，则 A^* 也为对称矩阵（2013-2014 期末）；A 为反对称矩阵，则 A^* 为偶数阶时也为反对称矩阵，奇数阶时为对称矩阵；
3. 上（下）三角矩阵的伴随矩阵是上（下）三角矩阵（对角特例）．

例 (2022-2023 期末拓展)

设实方阵 A 的伴随矩阵 $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，且 $|A| > 0$，已知矩阵 B 满足 $AB = E + 3A$，求矩阵 B.

例

设 A, B 均为 n 阶矩阵，且 $|A| = 2, |B| = 1$，求 $|2A^*B^* - A^{-1}B^{-1}|$.

例

设 A、B 分别为 m、n 阶可逆矩阵，且 $|A|=a$，$|B|=b$，求 $\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}^*$ 和 $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^*$.

例

若 n 阶非零矩阵 A 满足 $A^{\mathsf{T}}=A^*$，证明：

1. $|A|>0$；
2. $|A|=1$（补充：若 A 第一行元素相等，求第一行元素的值）；
3. A 为正交矩阵，即 $AA^{\mathsf{T}}=A^{\mathsf{T}}A$；
4. $n>2$ 且为奇数时，$|E-A|=0$.

伴随矩阵的秩

非常常见的结论，无论是结论还是证明都要熟悉.

例 (伴随矩阵的秩，2020-2021 期末)

设 A^* 为矩阵 A 的伴随矩阵，证明：$r(A^*) = \begin{cases} n & r(A) = n \\ 1 & r(A) = n-1 \\ 0 & r(A) < n-1 \end{cases}.$

伴随矩阵的秩

非常常见的结论，无论是结论还是证明都要熟悉.

例 (伴随矩阵的秩，2020-2021 期末)

设 A^* 为矩阵 A 的伴随矩阵，证明： $r(A^*) = \begin{cases} n & r(A) = n \\ 1 & r(A) = n-1 \\ 0 & r(A) < n-1 \end{cases}$.

证明.

1. 当 $r(A) = n$ 时，A 可逆，因此 $r(A^*) = r(|A|A^{-1}) = n$.
2. 当 $r(A) = n-1$ 时，$|A| = 0$，因此 $AA^* = |A|E = O$，因此 $r(A^*) \leqslant n - r(A) = 1$. 而 $r(A) = n-1$ 表明 A 中存在非零的 $n-1$ 阶子式，因此 A^* 不为 0，因此 $r(A^*) \geqslant 1$，因此 $r(A^*) = 1$.
3. 当 $r(A) < n-1$ 时，任意一个代数余子式 A_{ij} 都等于 0，故 $r(A^*) = 0$.

□

例

若 n 阶矩阵 A 的各行、各列元素之和都为 0，证明：$|A|$ 的所有元素的代数余子式都相等.

例 (2018-2019 期末)

不存在 2 阶方阵 A 使得 $r(A)+r(A^*)=3$，其中 A^* 是 A 的伴随矩阵.

例

设 A 为 n 阶实对称矩阵（$n>1$），$|A|=0$，证明：
$A_{ii}A_{jj}=(A_{ij})^2(i,j=1,\cdots,n)$.

例

设 A 为 n 阶矩阵，且 $r(A)<n$，又 $A_{11}\neq 0$，证明：存在常数 k，使得 $(A^*)^2=kA^*$.

行列式的秩

向量组的秩、线性映射的秩、矩阵的秩、行列式的秩统一.

例

证明：n 维向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 线性无关的充要条件是

$$\begin{vmatrix} \alpha_1^{\mathsf{T}}\alpha_1 & \alpha_1^{\mathsf{T}}\alpha_2 & \cdots & \alpha_1^{\mathsf{T}}\alpha_n \\ \alpha_2^{\mathsf{T}}\alpha_1 & \alpha_2^{\mathsf{T}}\alpha_2 & \cdots & \alpha_2^{\mathsf{T}}\alpha_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_n^{\mathsf{T}}\alpha_1 & \alpha_n^{\mathsf{T}}\alpha_2 & \cdots & \alpha_n^{\mathsf{T}}\alpha_n \end{vmatrix} \neq 0.$$

例

设 $W = \mathrm{span}(\alpha_1,\alpha_2)$ 是 $\mathbf{R}^4$ 的一个子空间，其中 $\alpha_1 = (1,2,1,-1)^{\mathsf{T}}$，$\alpha_2 = (1,4,-1,-1)^{\mathsf{T}}$，试将 α_1,α_2 扩充为 $\mathbf{R}^4$ 的基.

还有一些例子在 LALU 中，这里不再赘述.

1. 高斯消元法，含参的高斯消元法
2. 线性方程组有无解、唯一解、无穷解的判定
3. 齐次线性方程组的解空间及应用
4. 非齐次线性方程组解的性质
5. 线性方程组特殊题型（见 LALU）

高斯消元法

高斯消元法非常重要，无论是单独一个大题考察，还是嵌入在其它问题中. 教材中相关概念和算法的介绍已经非常详细，这里只作总结.

线性方程组 $\xrightarrow{1}$ 增广矩阵 $\xrightarrow{2}$ 阶梯矩阵 $\xrightarrow{3}$（行）简化阶梯矩阵 $\xrightarrow{4}$ 解

关于解的情况，我们分三种情况讨论：

1. 有唯一解：没有全零行，最后一个主元素的行号与系数矩阵的列数相
2. 无解：出现矛盾方程，即系数为 0 的行的行末元素不为 0；
3. 有无穷解：非上述情况. 此时设出自由未知量代入增广矩阵对应的方程组即可.

注意考试中单独考察解方程时，时间充足时建议将过程写完整，标明初等行变换的具体步骤，并且至少写出阶梯矩阵和行简化阶梯矩阵. 此外，时间充足可以解完方程后将答案代入进行检查.

需要强调的是，不要认为本节内容很简单就放过了，实际上如果长期不计算高斯消元法很容易陷入眼高手低的窘境.

含参数高斯消元法

此类问题一般考察对于含参数的线性方程组，参数取值如何时有解/无解/有唯一解等. 一般而言利用高斯消元判定解的情况，系数矩阵为方阵时可以使用 Cramer 法则简便判定有解时的具体情况.

例

当 k 取何值时，方程组：

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + kx_3 = 4 \\ -x_1 + kx_2 + x_3 = k^2 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \end{cases}$$

有唯一解、无解、有无穷多解？在有解的情况下，求出方程组的全部解.

对于有无解的区别，我们一般都考虑直接使用高斯消元法. 由高斯消元法有（省略中间步骤直接得到阶梯矩阵）:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & k & 4 \\ -1 & k & 1 & k^2 \\ 1 & -1 & 2 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & k & 4 \\ 0 & 2 & k-2 & 8 \\ 0 & 0 & \dfrac{(k+1)(4-k)}{2} & k(k-4) \end{pmatrix}.$$

1. 当 $k=-1$ 时，增广矩阵秩为 3，系数矩阵秩为 2（或者说最后一行出现矛盾方程），无解；
2. 当 $k=4$ 时，增广矩阵和系数矩阵秩均为 2，方程有无穷多解，解得同解为 $k_1(-3,-1,1)^{\mathsf{T}}+(0,4,0)^{\mathsf{T}}(k_1\in\mathbf{R})$；
3. 当 $k\neq -1,4$ 时，增广矩阵和系数矩阵秩均为 3，方程有唯一解，解为
$$\left(\frac{k^2+2k}{k+1},\frac{k^2+2k+4}{k+1},-\frac{2k}{k+1}\right)^{\mathsf{T}}.$$

含参数高斯消元法（Cont'd）

事实上，本题方程个数与未知数个数相等，因此可以运用?? 解决. 首先求解系数矩阵 A 的行列式为

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & k \\ -1 & k & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (k+1)(4-k),$$

由 Cramer 法则，当 $|A| \neq 0$ 时，方程组有唯一解，当 $|A| = 0$ 时，方程组无解或有无穷多解，其余关于有无解的讨论与上面一致.

线性方程组解的一般理论

定理 (线性方程组有解的充要条件)

线性方程组有解的充分必要条件是其系数矩阵与增广矩阵有相同的秩.

定理 (有解情况下唯一解和无穷解的判定)

当方程组有解时（注意这个前提），以下定理成立：

1. 如果它的系数矩阵 A 的秩等于未知量的数目 n，则方程组有唯一解；
2. 如果 A 的秩小于 n，则方程组有无穷多个解.

实际上，当系数矩阵为方阵时，这一定理就是 Cramer 法则结论的一部分. 实际上，通过上面两个定理我们首先了解了线性方程组有无解的一般准则，然后讨论了有解前提下唯一解、无穷解对应于什么情况. 事实上，有关线性方程组解的情况的讨论至此文意已尽. 无论是理论层面或是解决题目的方面，这两个定理都为我们提供了足量的信息（涉及线性方程组解的情况的问题，一般抽象矩阵用定理，具体矩阵用高斯消元）.

例 (2009-2010 期末)

判断：若线性方程组有 m 个方程，n 个变量，且 $m<n$，则这个方程组一定有非零解.

例 (抽象矩阵用定理)

1. 设 n 阶矩阵 A 的行列式 $|A|\neq 0$，记 A 的前 $n-1$ 列形成的矩阵为 A_1，A 的第 n 列为 b，问：线性方程组 $A_1X=b$ 是否有解？
2. 已知 A 是一个 $s\times n$ 矩阵，证明：线性方程组 $AX=b$ 对任意列向量 $b_{s\times 1}$ 都有解的充要条件是 A 行满秩.
3. 设 A 是 n 阶矩阵，且 $A_{11}\neq 0$，证明：方程组 $AX=b$（b 为非零向量）有无穷多解的充要条件为 $A^*b=0$.

例 (具体矩阵用高斯消元)

讨论 $b_1, b_2, \ldots, b_n \ (n \geqslant 2)$ 满足什么条件时，下列方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = b_1 \\ x_2 + x_3 = b_2 \\ \cdots \\ x_{n-1} + x_n = b_{n-1} \\ x_n + x_1 = b_n \end{cases}$$

有解，并求解.

定理

1. 齐次线性方程组 $AX=0$ 的解空间为 $\mathbf{R}^n$ 的子空间.
2. 矩阵 $A\in\mathbf{M}_{m\times n}(\mathbf{F})$，若 $r(A)=r$，则该齐次线性方程组解空间维数为 $n-r$.

例 (线性方程组理论与秩不等式)

1. 若 n 元齐次线性方程组 $AX=0$ 的解都是 $BX=0$ 的解. 证明: $r(B)\leqslant r(A)$.
2. 设 A,B 分别是 $m\times n$ 和 $n\times s$ 矩阵，则 $r(AB)\leqslant\min\{r(A),r(B)\}$;
3. 设 A,B 分别是 $m\times n$ 和 $n\times s$ 矩阵，且 $AB=O$，证明: $r(A)+r(B)\leqslant n$;
4. 设 A 是 $m\times n$ 实矩阵，证明: $r(A^{\mathsf{T}}A)=r(A)$;
5. $A^2=A \iff r(A)+r(E-A)=n$.

齐次线性方程组（Cont'd）

以上结论（加上后面非齐次的结论）轮换必考，需要熟练掌握.

以上结论（加上后面非齐次的结论）轮换必考，需要熟练掌握.

例 (2018-2019 期末)

设 $A \in M_{m\times n}(\mathbf{F})$，$r(A)=r$，$k$ 是满足条件 $r \le k \le n$ 的任意整数，证明存在 n 阶方阵 B，使得 $AB=0$，且 $r(A)+r(B)=k$.

例 (2019-2020 期末)

设 $A \in M_{m\times s}(\mathbf{R})$，且 $r(A)=r$，证明：存在矩阵 $B \in M_{s\times n}(\mathbf{R})$，且 $r(B)=\min\{s-r,\ n\}$，使得 $AB=0$.

例 (2022-2023 期末)

设 A 为 n 阶矩阵，满足 $r(A)=r$，证明：存在可逆的矩阵 P，使得 $P^{-1}AP$ 的后 $n-r$ 列均为 0.

例 (2014-2015 期末)

判断：对任何 $m \times n$ 实矩阵 A 和实列向量 b，方程组 $A^\top AX = A^\top b$ 总有解.

例 (2014-2015 期末)

判断：对任何 $m\times n$ 实矩阵 A 和实列向量 b，方程组 $A^{\mathsf{T}}AX=A^{\mathsf{T}}b$ 总有解.

例 (2021-2022 期末)

1. 设 A 是实数域上 $m\times n$ 阶矩阵，则矩阵秩 $r\left(A^{\mathsf{T}}A\right)=r(A)$.
2. 设 A 是复数域上 $m\times n$ 阶矩阵，则矩阵秩 $r\left(A^{\mathsf{T}}A\right)=r(A)$.

例 (2014-2015 期末)

判断：对任何 $m\times n$ 实矩阵 A 和实列向量 b，方程组 $A^{\mathsf{T}}AX=A^{\mathsf{T}}b$ 总有解.

例 (2021-2022 期末)

1. 设 A 是实数域上 $m\times n$ 阶矩阵，则矩阵秩 $r\left(A^{\mathsf{T}}A\right)=r(A)$.
2. 设 A 是复数域上 $m\times n$ 阶矩阵，则矩阵秩 $r\left(A^{\mathsf{T}}A\right)=r(A)$.

例

设 A,B,C 为 n 阶实方阵，且 $BAA^{\mathsf{T}}=CAA^{\mathsf{T}}$，证明：$BA=CA$.

齐次线性方程组（Cont'd）

例 (2014-2015 期末)

判断：对任何 $m\times n$ 实矩阵 A 和实列向量 b，方程组 $A^{\mathsf T}AX=A^{\mathsf T}b$ 总有解.

例 (2021-2022 期末)

1. 设 A 是实数域上 $m\times n$ 阶矩阵，则矩阵秩 $r\left(A^{\mathsf T}A\right)=r(A)$.
2. 设 A 是复数域上 $m\times n$ 阶矩阵，则矩阵秩 $r\left(A^{\mathsf T}A\right)=r(A)$.

例

设 A,B,C 为 n 阶实方阵，且 $BAA^{\mathsf T}=CAA^{\mathsf T}$，证明：$BA=CA$.

例

设 A 为数域 $\mathbf{F}$ 上的 n 阶方阵，又设线性空间 $\mathbf{F}^n$ 的两个子空间为 $W_1=\{X\in\mathbf{F}^n \mid AX=0\}$，$W_2=\{X\in\mathbf{F}^n \mid (A-E)X=0\}$. 证明：$A^2=A \iff \mathbf{F}^n=W_1\oplus W_2$.

例 (2019-2020 期末)

已知 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_s$ 是齐次线性方程组 $AX=0$ 的一组基础解系，向量组

$$\beta_1=t_1\alpha_1+t_2\alpha_2,\ \beta_2=t_1\alpha_2+t_2\alpha_3,\ \dots,\ \beta_{s-1}=t_1\alpha_{s-1}+t_2\alpha_s,\ \beta_s=t_1\alpha_s+t_2\alpha_1$$

试问当实数 t_1,t_2 满足何条件时，$\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_s$ 也是 $AX=0$ 的一个基础解系.

例

设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，b 和 X 为 m 元列向量，Y 为 n 元列向量，证明:

1. 若 $AY=b$ 有解，则 $A^{\mathsf{T}}X=0$ 的任一组解都满足 $b^{\mathsf{T}}X=0$;
2. 方程组 $AY=b$ 有解的充要条件是方程组 $\begin{pmatrix}A^{\mathsf{T}}\\ b^{\mathsf{T}}\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ 无解（其中 0 是 n 元零向量）.

教材第六章补充题 1 等其他题目也可以自行完成.

齐次线性方程组 (Cont'd)

矩阵可逆有行列式和线性方程组相关的等价条件.

例 (2010-2011 期末拓展)

1. 奇数阶反对称矩阵不可逆.
2. 设 A 和 B 是 n 阶方阵，其中 n 是奇数. 若 $AB = -BA$，证明：A 是不可逆的或者 B 是不可逆的.
3. 若 A 是 n 阶可逆对称矩阵，B 是 n 阶反对称矩阵，则当 n 为奇数时，齐次线性方程组 $(AB)X = O$ 有非零解.

例

设 n 阶实方阵 $A = (a_{ij})$ 适合条件 $|a_{ii}| > \sum\limits_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|$，$1 \leqslant i \leqslant n$，则称 A 是严格对角占优矩阵，求证：严格对角占优矩阵必定可逆. 若上述条件改为 $a_{ii} > \sum\limits_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|$，$1 \leqslant i \leqslant n$，求证：$|A| > 0$.

非齐次线性方程组

非齐次线性方程组的解不构成线性空间，但我们可以尝试将其与齐次线性方程组解空间联系起来研究. 对于非齐次线性方程组

$$x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + \cdots + x_n\beta_n = b \tag{6}$$

我们将 n 元齐次线性方程组

$$x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + \cdots + x_n\beta_n = 0 \tag{7}$$

称为其导出组，则我们有：

定理 (通解加特解)

如果 n 元非齐次线性方程组有解，则它的解集 $U = \{\gamma_0 + \eta \mid \eta \in W\}$.

其中 γ_0 为 6 的一个解（称为特解），W 为 7 的解空间（7 的解称为通解）. 更具体地，设非齐次线性方程组 $AX = b$ 有特解 X_0，方程 $AX = 0$ 的基础解系为 $X_1, \ldots, X_n$，则这一定理告诉我们 $AX = b$ 的任何一个解都可以写为 $X = X_0 + k_1X_1 + k_2X_2 + \cdots + k_nX_n$ 的形式.

非齐次线性方程组（Cont'd）

事实上，对于这种通解 + 特解的结构，如果读者在此之前学习了商空间一节，那么我们就会发现 U 实际上就是 W 的一个仿射子集. 当然如果没有学习相关概念，我们可以想象一个三元非齐次线性方程 $ax+by+cz=d$ 和齐次线性方程 $ax+by+cz=0$. 非齐次线性方程的解显然对应一个不过原点的平面，而齐次则过原点. 我们便可以认为是齐次线性方程解平面沿着特解对应的向量平移到非齐次线性方程的解平面，这便是这一结论的几何解释. 同时我们可以得到下述结论：

1. n 元非齐次线性方程组 6 的两个解的差是它的导出组 7 的一个解；
2. n 元非齐次线性方程组 6 的一个解与它的导出组 7 的一个解之和仍是非齐次线性方程组 6 的一个解.

例 (核心结果)

若 X_0 是非齐次线性方程组 $AX=b$ 的一个特解，$X_1,\dots,X_p$ 是 $AX=0$ 的基础解系，证明：

1. $X_0,X_1,X_2,\dots,X_p$ 线性无关；
2. $X_0,X_0+X_1,X_0+X_2,\dots,X_0+X_p$ 线性无关；
3. $AX=b$ 的任一个解 X 可表示为

$$X=k_0X_0+k_1(X_0+X_1)+k_2(X_0+X_2)+\cdots+k_p(X_0+X_p),$$

其中 $k_0+k_1+k_2+\cdots+k_p=1$.

例 (2018-2019 期末)

设 A 是数域 $\mathbf{F}$ 上一个秩为 r 的 n 阶方阵，β 是一个 n 维非零列向量，X_0 是线性方程组 $AX=\beta$ 的一个解，$X_1, \ldots, X_s$ 是它的导出组 $AX=0$ 的一组线性无关解.

1. 证明：向量组 $\{X_0, X_1, \ldots, X_s\}$ 线性无关；
2. 求出包含 $AX=\beta$ 解集的最小线性空间 W（需写出基和维数）.

例 (2018-2019 期末)

设 A 是数域 $\mathbf{F}$ 上一个秩为 r 的 n 阶方阵，β 是一个 n 维非零列向量，X_0 是线性方程组 $AX=\beta$ 的一个解，$X_1,\ldots,X_s$ 是它的导出组 $AX=0$ 的一组线性无关解.

1. 证明：向量组 $\{X_0,X_1,\ldots,X_s\}$ 线性无关；
2. 求出包含 $AX=\beta$ 解集的最小线性空间 W（需写出基和维数）.

例

设 A 为 $s\times n$ 矩阵，且 $r(A)=r$，证明：非齐次线性方程组 $AX=b$ 至多存在 $n-r+1$ 个线性无关的解向量.

非齐次线性方程组（Cont’d）

例 (2018-2019 期末)

设 A 是数域 $\mathbf{F}$ 上一个秩为 r 的 n 阶方阵，β 是一个 n 维非零列向量，X_0 是线性方程组 $AX=\beta$ 的一个解，$X_1,\ldots,X_s$ 是它的导出组 $AX=0$ 的一组线性无关解.

1. 证明：向量组 $\{X_0,X_1,\ldots,X_s\}$ 线性无关；
2. 求出包含 $AX=\beta$ 解集的最小线性空间 W（需写出基和维数）.

例

设 A 为 $s\times n$ 矩阵，且 $r(A)=r$，证明：非齐次线性方程组 $AX=b$ 至多存在 $n-r+1$ 个线性无关的解向量.

例

相容（即有解）的线性方程组 $AX=b$ 在怎样的条件下，其解中第 k 个未知量 x_k 都是同一个值？你给的条件是否是充分必要的？

1. 特征值与特征向量的定义、求解与基本性质
2. 相似的定义与基本性质
3. 相似对角化的求解，可对角化的条件与应用
4. 相合的定义与性质，二次型标准形的求解，惯性定理

定义 (线性变换的特征值与特征向量，矩阵类似，略)

设 σ 是线性空间 $V(\mathbf{F})$ 上的一个线性变换，如果存在数 $\lambda \in \mathbf{F}$ 和非零向量 $\xi \in V$ 使得 $\sigma(\xi) = \lambda\xi$，则称数 λ 为 σ 的一个特征值，并称**非零向量** ξ 为 σ 属于其特征值 λ 的特征向量.

$V_\lambda = \{\xi \mid \sigma(\xi) = \lambda\xi,\ \xi \in V\}$：$\sigma$ 关于特征值 λ 的特征子空间.
下面说明线性映射和矩阵的特征值与特征向量的关系. 设 A 是 σ 在基 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 下的表示矩阵，且 $\xi = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)X$，即 X 是坐标，则有

$$\begin{aligned}
\sigma(\xi) = \lambda\xi &\iff \sigma((\alpha_1, \dots, \alpha_n)X) = \lambda(\alpha_1, \dots, \alpha_n)X \\
&\iff (\sigma(\alpha_1, \dots, \alpha_n))X = (\lambda\alpha_1, \dots, \lambda\alpha_n)X \\
&\iff (\alpha_1, \dots, \alpha_n)AX = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)(\lambda X) \\
&\iff AX = \lambda X
\end{aligned}$$

可知 λ 同时是线性变换和矩阵的特征值，与基的选取无关. 但矩阵的特征向量 X 是线性映射特征向量在基下的坐标，这与基的选取有关.

接下来我们讨论如何求解特征值与特征向量.

定理

设 σ 是 $V(\mathbf{F})$ 上的线性变换，I 为恒等映射，则下述条件等价：

1. $\lambda \in \mathbf{F}$ 是 σ 的特征值；
2. $\sigma - \lambda I$ 不是单射；
3. $\sigma - \lambda I$ 不是满射；
4. $\sigma - \lambda I$ 不可逆.

因此 $\lambda \in \mathbf{F}$ 是 σ 的特征值等价于 $|\lambda E - A| = 0$，故可以通过 $|\lambda E - A| = 0$ 求解特征值，其中 A 为 σ 在某组基下的矩阵，E 为单位矩阵. 对于特征向量，求出 $(\lambda E - A)X = 0$ 的非零解就是特征向量在基 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ 下的坐标，如果是矩阵的特征向量，那么 X 就是解.

$f(\lambda) = |\lambda E - A|$ 称为矩阵 A 的特征多项式，其 k 重根称 k 重特征值（称 k 为代数重数），该特征值对应特征子空间维数称该特征值的几何重数.

特征值的性质

定理

对于 n 级矩阵 $A=(a_{ij})$，记

$$f(\lambda)=|\lambda E-A|=a_0\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n$$

则 $a_0=1$，$a_1=-\mathrm{tr}(A)$，$a_n=(-1)^n|A|$，且 a_k 等于所有 k 级主子式之和乘以 $(-1)^k$.

这里我们主要掌握两个特例，即特征值按重数求和为矩阵的迹，特征值按重数求积为矩阵行列式. 这一结论在解决某些问题时有一定作用.

特征值的性质

定理

对于 n 级矩阵 $A=(a_{ij})$，记

$$f(\lambda)=|\lambda E-A|=a_0\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n$$

则 $a_0=1$，$a_1=-\mathrm{tr}(A)$，$a_n=(-1)^n|A|$，且 a_k 等于所有 k 级主子式之和乘以 $(-1)^k$.

这里我们主要掌握两个特例，即特征值按重数求和为矩阵的迹，特征值按重数求积为矩阵行列式. 这一结论在解决某些问题时有一定作用.

例

设 A 为 n 阶复矩阵，P 为 n 阶可逆复矩阵，证明：$\mathrm{tr}(A)=\mathrm{tr}(P^{-1}AP)$.

特征值的性质（Cont'd）

1. 设 λ 是矩阵 A 的特征值，X 是 A 属于 λ 的特征向量，则
   1. $k\lambda$ 是 kA 的特征值，λ^m 是 A^m 的特征值，且 X 仍是相应特征向量；
   2. 若 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 是 $\mathbf{F}$ 上的多项式，则 $f(A)X=f(\lambda)X$；
2. 设 λ 是 n 阶矩阵 A 的特征值，A 可逆，则 λ^{-1} 是 A^{-1} 的特征值，$|A|\lambda^{-1}$ 是 A 的伴随矩阵 A^* 的特征值，且特征向量不变.

例

对下列矩阵 A 的特征值，能做出怎样的断言？

1. A 可逆/A 不可逆/$E+A$ 可逆/$4E+A$ 不可逆；
2. $|E-A^2|=0$；
3. $A^2=E$（对合）/$A^2=A$（幂等）/$A^k=0$（幂零）；
4. $A=\lambda_0E+B$（λ_0 为常数，且已知 B 的 n 个特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$）；
5. A 为对角块矩阵，即 $A=\mathrm{diag}(A_1,A_2,\ldots,A_m)$.

例

设 $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$ 是矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 的 n 个特征值，证明：$\lambda_1^2,\lambda_2^2,\dots,\lambda_n^2$ 是 A^2 的 n 个特征值，且 $\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i^2=\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n}a_{jk}a_{kj}$.

特征值的性质（Cont’d）

例

设 $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ 是矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 的 n 个特征值，证明：$\lambda_1^2,\lambda_2^2,\ldots,\lambda_n^2$ 是 A^2 的 n 个特征值，且 $\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i^2=\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n}a_{jk}a_{kj}$.

例 (2018-2019 期末)

已知矩阵 A 与 $B=\begin{pmatrix}2&8&6&5\\0&0&3&2\\0&0&1&7\\0&0&0&9\end{pmatrix}$ 相似，求：

1. 行列式 $|A^2-9A+4E_4|$ 的值；
2. $r(A^*)+r(9E_4-A)$，其中 A^* 是 A 的伴随矩阵.

例 (2018-2019 期末)

判断：设 n 阶方阵 A 满足 $A^2-5A+5E_n=0$，则对所有的有理数 r，$A+rE_n$ 都是可逆阵.

特征值的性质（Cont’d）

例 (2018-2019 期末)

判断：设 n 阶方阵 A 满足 $A^2-5A+5E_n=0$，则对所有的有理数 r，$A+rE_n$ 都是可逆阵.

例 (2019-2020 期末)

记 $X=\left\{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\in M_{3\times 3}(\mathsf{R}) \,\middle|\, \sum\limits_{j=1}^{3} a_{1j}=\sum\limits_{j=1}^{3} a_{2j}=\sum\limits_{j=1}^{3} a_{3j}=\sum\limits_{j=1}^{3} a_{jj}\right\}$，

证明：

1. X 是 $M_{3\times 3}(\mathbf{R})$ 的一个子空间，并求该子空间的维数；
2. 对任意可逆矩阵 $A\in X$，$(1,\ 1,\ 1)^{\mathsf{T}}$ 是 A 和 A^{-1} 的特征向量；
3. 对任意可逆矩阵 $A\in X$，$A^{-1}\in X$.

定理

设 V 是有限维的，$\sigma \in L(V)$ 且 $\lambda \in \mathbf{F}$，则

1. σ 的不同特征值对应的特征向量线性无关；
2. σ 的不同特征值对应的特征子空间的和为直和；
3. σ 最多有 $\dim V$ 个不同的特征值.

上述定理有如下推论：

1. 若 $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ 是线性映射 σ 互异的特征值，则 $V_{\lambda_i} \cap \sum\limits_{j\neq i} V_{\lambda_j} = \{0\}\ \ (i = 1, \ldots, m)$，则一个特征向量不能属于多个特征值. 这一推论来源于直和的一个等价条件，线性空间运算一讲的习题中有涉及.
2. σ 的不同特征值 $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ 对应的特征子空间 $V_{\lambda_1}, \ldots, V_{\lambda_m}$ 的基向量合在一起构成的向量组线性无关，且是 $V_{\lambda_1} + V_{\lambda_2} + \cdots + V_{\lambda_m}$ 的基.

接下来这个定理讨论了代数重数和几何重数间的关系：

定理

n 维线性空间 $V(\mathbf{F})$ 的线性变换 σ 的每个特征值 λ_0 的重数（代数重数）大于等于其特征子空间 V_{λ_0} 的维数（几何重数）.

例 (相似题：2013-2014 期末)

设 $V(\mathbf{F})$ 是 n 维线性空间，$\sigma \in \mathscr{L}(V)$，证明：

1. 若 α, β 是 σ 的属于不同特征值的特征向量，则 $c_1 c_2 \neq 0$ 时，$c_1\alpha + c_2\beta$ 不是 σ 的特征向量；
2. V 中的每一非零向量都是 σ 的特征向量 $\Longleftrightarrow$ $\sigma = c_0 I_V$，其中 $c_0 \in \mathbf{F}$ 是一个常数，I_V 是恒等变换.

特征值与特征向量拓展练习

例

1. 设 $T\in\mathscr{L}(V)$ 且 $\dim\operatorname{im}T=k$. 证明 T 至多有 $k+1$ 个特征值.
2. 设 A,B 都是 n 阶矩阵，且 $r(A)+r(B)<n$，证明：A,B 有相同的特征值和特征向量.

例 (2011-2012 期末)

求 $a,b,c,d,e,f\in\mathbf{R}$，使 $(1,1,1)^{\mathrm{T}},(1,0,-1)^{\mathrm{T}},(1,-1,0)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^3$ 是矩阵 $\begin{pmatrix}1&-1&1\\a&b&c\\d&e&f\end{pmatrix}$ 的特征向量.

例

设 $A,B\in\mathbf{M}_n(\mathbf{C})$，$B$ 的特征多项式 $f(\lambda)=|\lambda E-B|$. 证明：$f(A)$ 可逆的充要条件是 B 的任一特征值都不是 A 的特征值.

相似的定义

定理 (基的选择对映射矩阵的影响)

设线性变换 $\sigma \in \mathscr{L}(V,V)$，$B_1 = \{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$ 和 $B_2 = \{\beta_1,\dots,\beta_n\}$ 是线性空间的 $V(\mathbf{F})$ 的两组基，基 B_1 变为基 B_2 的变换矩阵为 C，如果 σ 在基 B_1 下的矩阵为 A，则 σ 关于基 B_2 所对应的矩阵为 $C^{-1}AC$.

这一定理研究了同一个线性变换在不同基下表示矩阵之间的关系. 我们将同一个线性变换在不同基下表示的两个矩阵的关系称为相似的，规范定义如下：

定义

若对于 $A,B \in \mathbf{M}_n(\mathbf{F})$，存在可逆矩阵 $C \in \mathbf{M}_n(\mathbf{F})$, 使得 $C^{-1}AC = B$，则称 A 相似于 B，记作 $A \sim B$.

相似的定义

定理 (基的选择对映射矩阵的影响)

设线性变换 $\sigma \in \mathscr{L}(V,V)$，$B_1 = \{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$ 和 $B_2 = \{\beta_1,\dots,\beta_n\}$ 是线性空间的 $V(\mathbf{F})$ 的两组基，基 B_1 变为基 B_2 的变换矩阵为 C，如果 σ 在基 B_1 下的矩阵为 A，则 σ 关于基 B_2 所对应的矩阵为 $C^{-1}AC$.

这一定理研究了同一个线性变换在不同基下表示矩阵之间的关系. 我们将同一个线性变换在不同基下表示的两个矩阵的关系称为相似的，规范定义如下：

定义

若对于 $A,B \in \mathbf{M}_n(\mathbf{F})$，存在可逆矩阵 $C \in \mathbf{M}_n(\mathbf{F})$, 使得 $C^{-1}AC = B$，则称 A 相似于 B，记作 $A \sim B$.

例 (2022-2023 期末)

设 A 为 n 阶矩阵，满足 $r(A) = r$，证明：存在可逆的矩阵 P，使得 $P^{-1}AP$ 的后 $n-r$ 列均为 0.

相似的性质

相似有以下基本性质需要了解:

- 相似是一种等价关系;两矩阵相似必相抵(相似矩阵的秩相等);
- $A \sim B$ 可以得到 $A^{\mathsf{T}} \sim B^{\mathsf{T}}$, $A^m \sim B^m$. 更一般地,对于任意多项式 $f(x)$ 都有 $f(A) \sim f(B)$, 且若 $B = P^{-1}AP$, 有 $f(B) = P^{-1}f(A)P$. 除此之外还有 A,B 可逆时, $A^{-1} \sim B^{-1}$, $A^* \sim B^*$;
- $A_1 \sim B_1$, $A_2 \sim B_2$ 不一定有 $A_1 + A_2 \sim B_1 + B_2$, 只有当过渡矩阵相同, $P^{-1}A_1P = B_1, P^{-1}A_2P = B_2$ 时才有 $P^{-1}(A_1 + A_2)P = B_1 + B_2$;
- 若 $A_1 \sim B_1$, $A_2 \sim B_2$, 则有

$$\begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} B_1 & O \\ O & B_2 \end{pmatrix};$$

相似的性质（Cont’d）

- 相似矩阵有相同的特征多项式（逆命题不成立），即 $A \sim B$ 有 $|\lambda E - A| = |\lambda E - B|$，从而有相同的迹，行列式，特征值，但特征向量不一定相同；虽然我们不能用特征值相同得到矩阵相似（可以得到相抵、相合），但若两个 n 阶矩阵特征值相同，且 n 个特征值互不相同，这时它们有相同的相似标准形对角矩阵，故相似.
- 与幂等矩阵相似的仍幂等，与对合矩阵相似的仍对合，与幂零矩阵相似的仍幂零（但与正交矩阵相似的不一定正交，但与正交矩阵正交相似的是正交矩阵）.

- 相似矩阵有相同的特征多项式（逆命题不成立），即 $A \sim B$ 有 $|\lambda E - A| = |\lambda E - B|$，从而有相同的迹，行列式，特征值，但特征向量不一定相同；虽然我们不能用特征值相同得到矩阵相似（可以得到相抵、相合），但若两个 n 阶矩阵特征值相同，且 n 个特征值互不相同，这时它们有相同的相似标准形对角矩阵，故相似.
- 与幂等矩阵相似的仍幂等，与对合矩阵相似的仍对合，与幂零矩阵相似的仍幂零（但与正交矩阵相似的不一定正交，但与正交矩阵正交相似的是正交矩阵）.

例 (2010-2011 期末)

判断：若方阵 A 相似于方阵 B，则 A 与 B 有相同的特征向量.

相似的性质（Cont’d）

- 相似矩阵有相同的特征多项式（逆命题不成立），即 $A \sim B$ 有 $|\lambda E - A| = |\lambda E - B|$，从而有相同的迹，行列式，特征值，但特征向量不一定相同；虽然我们不能用特征值相同得到矩阵相似（可以得到相抵、相合），但若两个 n 阶矩阵特征值相同，且 n 个特征值互不相同，这时它们有相同的相似标准形对角矩阵，故相似.
- 与幂等矩阵相似的仍幂等，与对合矩阵相似的仍对合，与幂零矩阵相似的仍幂零（但与正交矩阵相似的不一定正交，但与正交矩阵正交相似的是正交矩阵）.

例 (2010-2011 期末)

判断：若方阵 A 相似于方阵 B，则 A 与 B 有相同的特征向量.

例

设 A 为三阶矩阵，$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关，且 $A\alpha_1 = \alpha_1, A\alpha_2 = \alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3, A\alpha_3 = \alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3$，求 A 的特征值.

例 (2013-2014 期末)

设 A 和 B 分别是 $m\times n$ 和 $n\times m$ 矩阵.

1. 设 $\lambda\neq 0$. 证明 λ 是 $m\times m$ 矩阵 AB 的特征值当且仅当 λ 是 $n\times n$ 矩阵 BA 的特征值.
2. 证明 I_m-AB 是可逆矩阵当且仅当 I_n-BA 是可逆矩阵 (I_m 是 m 阶单位矩阵，I_n 是 n 阶单位矩阵).

更一般的情形在 LALU 上，但涉及分块矩阵初等变换此处不介绍.

例 (2013-2014 期末)

设 A 和 B 分别是 $m\times n$ 和 $n\times m$ 矩阵.

1. 设 $\lambda\neq 0$. 证明 λ 是 $m\times m$ 矩阵 AB 的特征值当且仅当 λ 是 $n\times n$ 矩阵 BA 的特征值.
2. 证明 I_m-AB 是可逆矩阵当且仅当 I_n-BA 是可逆矩阵 (I_m 是 m 阶单位矩阵，I_n 是 n 阶单位矩阵).

更一般的情形在 LALU 上，但涉及分块矩阵初等变换此处不介绍.

例

设 α 是 n 维实向量且 $\alpha^{\mathrm{T}}\alpha=1$，求矩阵 $I-2\alpha\alpha^{\mathrm{T}}$ 的特征值.

例

设 A,B 都是 n 阶矩阵，证明：$AB+B$ 和 $BA+B$ 有相同的特征值.

例

已知三阶矩阵 A 和三元列向量 X，使得向量组 X, AX, A^2X 线性无关，且满足

$$A^3X = 3AX - 2A^2X.$$

1. 记 $P = (X, AX, A^2X)$，求三阶矩阵 B 使得 $A = PBP^{-1}$；
2. 计算行列式 $|A+E|$.

定理

任一复方阵必相似于一上三角矩阵.

证明.

$n=1$ 时显然. 现假设 $n-1$ 阶复矩阵都可以相似于上三角矩阵，设 A 为 n 阶复矩阵，我们任取 A 的一个复特征值 λ_1，设 α_1 为 A 对应于 λ_1 的特征向量. 我们把 α_1 扩充为 $\mathbf{C}^n$ 的一组基，记为 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$，记 $P_1=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$，则 P_1 可逆，且 $P_1^{-1}AP_1=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \alpha' \\ 0 & A_{n-1}\end{pmatrix}$，我们对 $n-1$ 阶矩阵 A_{n-1} 应用归纳假设，因此存在可逆矩阵 P_2 使得 $P_2^{-1}A_{n-1}P_2$ 为上三角矩阵，取 $P=P_1\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & P_2\end{pmatrix}$，直接有 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \alpha'P_1 \\ 0 & P_2^{-1}A_{n-1}P_2\end{pmatrix}$ 为上三角矩阵，因此 n 阶复矩阵一定相似于上三角矩阵. □

对角化解法

求线性映射 σ 对角化的一般方法为:

1. 先任意写出 σ 在一组基 B 下的矩阵 A，当然为了计算方便一般选取自然基;
2. 利用特征多项式 $f(\lambda) = |\lambda E - A| = 0$ 求出 A 的所有不同特征值;
3. 解线性方程组 $(\lambda E - A)X = 0$，其中 λ 是上一步求出的特征值，求出 A 在不同特征值下的线性无关特征向量;
4. 第三步中求得的所有向量就是 σ 的特征向量在基 B 下的坐标，根据前面的讨论，σ 的特征向量也就是使得 σ 的矩阵表示为对角矩阵的那组基.
5. 当然，如果题目中直接给出求 P 使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵，那么我们只需进行 2、3 两步，并将 3 中得到的向量按列排列成矩阵 P 即可.

如果线性变换 σ 可对角化，则它的任意一组基 B_1 下的表示矩阵 A 都是可对角化的.

例 (2021-2022 期末)

求矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

的所有特征值，对应的特征子空间，以及与 A 相似的一个对角矩阵.

例 (2014-2015 期末)

设 T 是次数小于等于 2 的实多项式线性空间 V 上的变换，对任意 $f(x) \in V$，定义

$$T(f(x)) = \frac{\mathrm{d}((x-2)f(x))}{\mathrm{d}x}$$

证明 T 是 V 上的线性变换，且 T 可对角化.

对角化解法（Cont’d）

例 (2012-2013 期末)

设 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 是可逆矩阵，其中 $b\neq 0$；λ 是 A 的特征值.

1. 证明 $\lambda\neq 0$.
2. 证明 $(b,\lambda-a)^{\mathrm{T}}$ 是属于 λ 的特征向量.
3. 若 A 有两个不同的特征值 λ_1 和 λ_2，求可逆矩阵 P 使 $P^{-1}AP$ 是对角矩阵.

例 (2012-2013 期末改编)

设 2 阶实对称阵 A 满足方程 $A^2-6A+5I_2=0$，其中 I_2 是 2 阶单位矩阵，试给出全部有可能与 A 相似（注意，不是相合！）的对角矩阵.

定理 (可对角化充要条件（矩阵有类似定理）)

设 V 是数域 $\mathbf{F}$ 上的 n 维线性空间，σ 是 V 上的线性变换，$\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_s\in\mathbf{F}$ 是 σ 的所有互异特征值，则以下条件等价：

1. σ 可对角化；
2. σ 有 n 个线性无关的特征向量，它们构成 V 的一组基；
3. $V=V_{\lambda_1}\oplus V_{\lambda_2}\oplus\cdots\oplus V_{\lambda_s}$；
4. $n=\dim V_{\lambda_1}+\dim V_{\lambda_2}+\cdots+\dim V_{\lambda_s}$；
5. σ 每个特征值的代数重数等于几何重数.

推论 (可对角化必要条件)

若 n 维空间上的线性变换 σ 有 n 个不同的特征值，则 σ 可对角化. 反之，σ 可对角化不一定有 n 个特征值.

由特征值的性质，A 可对角化，对任意多项式 $f(x)$，$f(A)$ 也可对角化，且 A 可逆时，A^{-1} 和 A^* 也可对角化.

例 (2011-2012 期末)

设 $\sigma: V \to V$ 是有限维线性空间 V 上的一个同构映射. 记 $V(\sigma;\lambda)$ 为 σ 的属于特征值 λ 的特征子空间.

1. 如果 λ 是 σ 的特征值，证明：$\lambda \neq 0$.
2. 证明 λ 是 σ 的特征值，证明：$V(\sigma;\lambda) = V(\sigma^{-1};\lambda^{-1})$.
3. 证明 "σ 可对角化" 的充要条件是 "σ^{-1} 可对角化".

例 (Jordan 块矩阵不可对角化)

证明 $r(r>1)$ 阶上三角矩阵 $J_0 = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & & \\ & \lambda_0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_0 \end{pmatrix}$ 不与对角阵相似.

对角化充要条件（Cont'd）

例 (Jordan 块矩阵不可对角化)

证明 $r(r>1)$ 阶上三角矩阵 $J_0=\begin{pmatrix}\lambda_0 & 1 & & \\ & \lambda_0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_0\end{pmatrix}$ 不与对角阵相似.

例 (秩 1 矩阵可对角化)

设 α 和 β 是 $\mathbf{R}^n$ $(n>1)$ 中两个列向量，$A=\alpha\beta^{\mathsf{T}}\neq O$.

1. 求 A 的特征值；
2. 证明：$\alpha^{\mathsf{T}}\beta=0 \iff A$ 不可对角化.

本例非常经典，请读者务必掌握本例的结论和解决方法. 事实上这一例题的结论与这一论述是等价的：秩为 1 的矩阵 A 可对角化的充要条件是 A 的迹不为 0.

例 (可对角化经典例题)

解决以下关于可对角化的基本问题：

1. 设 A 为 n 阶矩阵，且 $A^2=2A$. 证明：A 可对角化，并求出与之相似的对角矩阵（注：本题结论可推广到任意的 $A^2=kA$）；
2. 设 A 为 n 阶非零矩阵，且 $A^m=O$ $(m\in\mathbf{N}_+,\ m>1)$. 证明：A 不可对角化；
3. 设 A 为二阶矩阵，非零向量 α 不是 A 的特征向量，且 $A^2\alpha-3A\alpha+2\alpha=0$. 证明：$\alpha$ 和 $A\alpha$ 线性无关且 A 可对角化并求与 A 相似的对角矩阵.

根据上面这一例子，我们也可以很容易证明满足 A^2+A+E 的实矩阵 A 在实数域上不可对角化.

例 (2009-2010 期末)

设 $A \in M_{n\times n}(\mathbf{F})$ 有两个不同的特征值 λ_1, λ_2，且属于 λ_1 的特征子空间的维数是 $n-1$，证明：A 是可对角化的.

例 (2013-2014 期末)

令 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & x & y \end{pmatrix}$，其特征多项式 $f(\lambda) = \lambda^3 + \lambda + 2$.

1. 求 x 和 y 的值.
2. 若将 A 看作实矩阵，A 是否可对角化？为什么？
3. 若将 A 看作复矩阵，A 是否可对角化？为什么？

（对角）相似标准形分解

如果一个矩阵可对角化，则有 $P^{-1}AP=\Lambda$，其中 Λ 是对角矩阵，则 $A=P\Lambda P^{-1}$，这就是所谓特征值分解.

例 (2010-2011 期末)

求 2×2 实矩阵 A，使得 A 的特征值是 2 和 1，而对应于 2 的特征子空间由 $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ 生成，对应于 1 的特征子空间由 $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ 生成.

如果一个矩阵可对角化，则有 $P^{-1}AP=\Lambda$，其中 Λ 是对角矩阵，则 $A=P\Lambda P^{-1}$，这就是所谓特征值分解.

例 (2010-2011 期末)

求 2×2 实矩阵 A，使得 A 的特征值是 2 和 1，而对应于 2 的特征子空间由 $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ 生成，对应于 1 的特征子空间由 $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ 生成.

之前讲解的利用对角化求解矩阵的幂实际上也是用了这里的分解思想.

例

设三阶矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=3$，它们对应的特征向量为 $\xi_1=(1,1,1)^{\mathsf{T}},\xi_2=(1,2,4)^{\mathsf{T}},\xi_3=(1,3,9)^{\mathsf{T}}$，又 $\beta=(1,1,3)^{\mathsf{T}}$，计算 $A^n\beta$.

例

设 A 为三阶矩阵，$A^2 = A$ 且 $r(A) = r$，求 $|A - 2E|$.

例

设 A 为三阶矩阵，$A^2 = A$ 且 $r(A) = r$，求 $|A - 2E|$.

总结幂等矩阵的基本性质：

1. A 是幂等矩阵等价于 $r(A) + r(A - E) = n$；
2. A 为幂等矩阵则一定可对角化，特征值为 0 和 1，其中 1 的重数等于 $r(A)$；
3. A 是幂等矩阵时，$r(A) = \mathrm{tr}(A)$；
4. 所有秩为 1 迹也为 1 的矩阵均为幂等矩阵.

（对角）相似标准形分解（Cont'd）

例

设 A 为三阶矩阵，$A^2 = A$ 且 $r(A) = r$，求 $|A-2E|$.

总结幂等矩阵的基本性质：

1. A 是幂等矩阵等价于 $r(A)+r(A-E)=n$；
2. A 为幂等矩阵则一定可对角化，特征值为 0 和 1，其中 1 的重数等于 $r(A)$；
3. A 是幂等矩阵时，$r(A)=\mathrm{tr}(A)$；
4. 所有秩为 1 迹也为 1 的矩阵均为幂等矩阵.

例

设 A 相似于对角矩阵，λ_0 是 A 的特征值，X_0 是 A 对应于 λ_0 的特征向量，证明：

1. $r(A-\lambda_0 E)^2 = r(A-\lambda_0 E)$；
2. 不存在 Y 使得 $(A-\lambda_0 E)Y = X_0$.

相似的判断

我们并未给出相似不变量，没有类似于秩相等这样的相抵的充要条件，所以判定相似需要一些必要条件.

1. 定义法：找到 P 使得 $P^{-1}AP = B$ 即可，这一般是 A, B 没给出具体矩阵的做法，例如之前的性质证明以及最开始的那个例子；
2. 我们也可以先计算两者迹、行列式、特征多项式是否相等（即特征值是否一致），若不一致则一定不相似，得到结论，若一致且均为实对称矩阵则相似，否则不一定相似（因为这是相似的必要条件）. 对于这种特征值一致的情况，我们进行对角化，情况如下：
   1. 若两矩阵均可对角化，则两矩阵相似：因为特征多项式相等则特征值相等，均可对角化那么对角矩阵也完全一致，因此二者与同一个对角矩阵相似，根据相似这一等价关系的传递性可知两矩阵相似；
   2. 若一个矩阵可对角化，另一个矩阵不可对角化，则一定不相似；
   3. 若两个矩阵都不可对角化，不一定相似. 需要两矩阵各个特征值的几何重数（即各个特征子空间维数）都一致才相似，否则不相似. 具体原因是只有几何重数一致才有相同的若当标准形.

例 (2012-2013 期末)

判断：若 n 阶方阵 A, B 中的 A 是可逆的，则 AB 与 BA 是相似的.

例 (2012-2013 期末)

判断：若 n 阶方阵 A,B 中的 A 是可逆的，则 AB 与 BA 是相似的.

例

设 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&-6&2\end{pmatrix}$，判断 A 与 B 是否相似.

相似的判断（Cont'd）

例 (2012-2013 期末)

判断：若 n 阶方阵 A,B 中的 A 是可逆的，则 AB 与 BA 是相似的.

例

设 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&-6&2\end{pmatrix}$，判断 A 与 B 是否相似.

例 (2011-2012 期末)

设 A,B 都是域 $\mathbf{F}$ 上的 n 阶对角矩阵，且 A 的对角元是 B 的对角元的一个置换. 证明：

1. A 相似于 B.
2. A 相合于 B.

例 (2019-2020 期末)

判断：若 A, B 为 n 阶上三角矩阵，且对角线上元素都相同，则 A 与 B 相似.

例 (2019-2020 期末)

判断：若 A, B 为 n 阶上三角矩阵，且对角线上元素都相同，则 A 与 B 相似.

例

已知 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix}$ 与 $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ 相似.

1. 求 x 和 y;
2. 求一个可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

例

设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 是上三角矩阵.

1. 求 A 的全部特征值;
2. 若 A 主对角元互不相等，证明：A 与对角阵相似;
3. 若 n 个主对角元相等且 A 不为对角矩阵，证明：A 不与对角阵相似.

例

设 $A=\begin{pmatrix}2 & 2 & 0\\ 8 & 2 & a\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix}$ 相似于对角矩阵，求常数 a，并求可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

例

设 $A,B\in\mathbf{M}_n(\mathbf{F})$，$AB=BA$，证明：

1. 若 X 是矩阵 A 属于特征值 λ_0 的特征向量，则 $BX\in V_{\lambda_0}$.
2. A 和 B 至少有一个共同的特征向量.
3. A 有 n 个不同的特征值则
   1. $AB=BA$ 当且仅当 A 的特征向量也是 B 的特征向量.
   2. 存在次数小于等于 $n-1$ 的多项式 $f(x)$ 使得 $B=f(A)$.
4. 若 A,B 均可对角化，则对角化的过渡矩阵可以相同（同时对角化）.
5. A,B 可以同时上三角化，即存在可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP$ 和 $P^{-1}BP$ 都是上三角矩阵.

例

设 $A,B\in \mathbf{M}_n(\mathbf{F})$，$AB=BA$，证明：

1. 若 X 是矩阵 A 属于特征值 λ_0 的特征向量，则 $BX\in V_{\lambda_0}$.
2. A 和 B 至少有一个共同的特征向量.
3. A 有 n 个不同的特征值则
   1. $AB=BA$ 当且仅当 A 的特征向量也是 B 的特征向量.
   2. 存在次数小于等于 $n-1$ 的多项式 $f(x)$ 使得 $B=f(A)$.
4. 若 A,B 均可对角化，则对角化的过渡矩阵可以相同（同时对角化）.
5. A,B 可以同时上三角化，即存在可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP$ 和 $P^{-1}BP$ 都是上三角矩阵.

例 (2010-2011 期末)

设 n 阶方阵 A 和 B 都可对角化，并且它们有相同的特征子空间（但不一定有相同的特征值），证明 $AB=BA$.

定理 (幂零矩阵的性质)

设 n 阶矩阵 A 是幂零的，则

1. A 的所有特征值均为 0（等价定义）;
2. $A^n = O$;
3. $A \pm I$ 可逆.

例 (历年卷判断题组合)

1. 若对于任何正整数 n，方阵 A（阶数大于 1）的 n 次乘积 A^n 都是非零方阵，则 A 可逆.
2. 若存在正整数 n，使得方阵 A 的 n 次幂 $A^n = 0$，则 A 的行列式 $|A| = 0$.
3. 若 $n(n > 1)$ 阶方阵 A 的特征多项式是 $f(\lambda) = \lambda^n$，则 A 是零矩阵.

故事的结尾：未竟之美

我想每一门课都有它要讲的一个故事，对于线性代数这门课而言，最合适的结尾应该是一个留有无限遐想的版本.

1. 从数学本身的角度看，线性代数占据什么样的地位?
2. 不谈数学本身，你未来还能在什么地方见到线性代数?

或许这也是我们写的这本讲义取名未竟之美的原因.

注：尽管很多同学下学期还需要学习线性代数 II（H）课程，但实际上也只是进一步完成导言中讨论的目标.

从数学本身的角度看

1. 首先线性代数作为代数学的研究方向，从代数结构的角度来看，线性空间是可以由一组基张成的一类很特殊的结构（比如群就没有），所以我们研究线性空间会非常方便，这也让线性空间分类这一任务异常简单.
2. 另外一个角度我想从内积空间出发，我相信大部分教材都会写，老师也都会在课上说，我们引入内积的动机是希望给向量定义长度和方向，这在解析几何中是必要的基础. 我们这里不再赘述这样的观点，我们希望以另一个视角来看待内积给线性代数带来了什么，并从中探究线性代数与微积分（数学分析）可能的关联.

回顾经典的数列极限或者函数极限的定义，我们发现，无论是 $|a_n - a| < \varepsilon$ 还是 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ 还是邻域的概念，我们都离不开对距离的定义. 那么什么是距离？距离就是集合中两个点之间的远近的度量，所以类似于线性空间是在集合上定义满足一些性质的两种运算，我们也可以在集合上定义一个距离函数，这样得到的是一个度量空间：

定义

设 X 是一个集合，它的元素称为点，如果 X 的任意两点 p 和 q 联系于一个实数 $d(p,q)$，称为从 p 到 q 的距离，它满足条件

1. 如果 $p \neq q$，那么 $d(p,q) > 0$，$d(p,p) = 0$；
2. $d(p,q) = d(q,p)$；
3. 对于任意 $r \in X$，$d(p,q) \leqslant d(p,r) + d(r,q)$.

则称 X 是一个度量空间，满足这三条性质的函数称为距离函数或度量.

那么我们便会发现，一元微积分中研究的就是集合 $X = \mathbf{R}$ 上定义了两点之间距离函数为绝对值函数的度量空间上函数的性质，而欧式空间则是满足加法、数乘运算性质的集合 V 上定义以内积为基础的距离，显然也是满足上面的三条性质的.
那么我们有一个自然的问题，线性映射实际上也是一个函数，只不过定义域和值域都是线性空间，那么为什么我们在线性代数中不会像微积分里面那样研究这样的函数的性质呢？原因在我们接下来要证明地主定理中给出：有限维线性空间之间的线性映射都是连续函数. 于是，线性代数中的函数只是定义域、值域特殊，并且还具有特殊性质——连续的函数，所以从这一角度来看只是微积分的特例，因为微积分研究的是更一般的，不具有线性运算性质的集合上（比如一个 $\mathbf{R}$ 上的闭区间做数乘运算后运算不封闭）定义的性质不一定很好（黎曼可积不一定要连续）的函数的性质. 那么下面我们就来逐步证明这一主定理.

定理

1. 证明：欧式空间中定义的距离函数连续；
2. 证明：欧式空间中的范数（距离函数）定义具有等价性，即对于欧式空间中定义的两种内积对应的两种长度定义 $|\cdot|_\alpha, |\cdot|_\beta$，存在常数 $c_1, c_2 > 0$ 有

$$
\begin{aligned}
|\eta|_\alpha &\leqslant c_1|\eta|_\beta, \\
|\eta|_\beta &\leqslant c_2|\eta|_\alpha.
\end{aligned}
$$

   即任意两种长度定义是等价的.
3. 证明：任意有限维线性空间间的线性映射连续.（根据任意空间与向量空间 $\mathbf{R}^n$ 同构，我们可以把讨论限制在 $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ 的映射上，并且前面的等价性我们知道任何长度定义的连续性都没有区别，所以我们可以取最简单的两点之间距离的内积定义来证明）

事实上，在数学中我们最基本的想法便是基于严谨的公理化集合论，然后在集合上进行研究. 分析学中，我们有最基本的拓扑空间，研究拓扑空间中我们感兴趣的集合上定义的函数，然后引入度量从而有了极限的概念，并且把眼光放在实数（或多元函数在 $\mathbf{R}^n$ 上）中的特殊拓扑空间上的集合上定义的函数. 而代数学则研究集合上定义运算得到的代数结构有什么样的性质，这两者什么时候能结合呢？我们在上面看到了有限维线性空间之间的函数的性质的研究就是一种思想的交汇，但我们发现研究的必要性不大，于是二者真正的交融发生在无限维线性空间上，这上面的性质将会异常复杂.

未来的应用

1. 统计学：马尔科夫链（状态转移矩阵，见教材第七章最后一个习题）、协方差矩阵等；
2. 优化：运筹、优化设计大量线性代数知识，工科专业大量需要矩阵论，控制理论很大一部分也与线性代数息息相关；
3. 机器学习：特征人脸识别；图像去噪；图像存储；潜在语言索引；

$$A = P\Lambda Q = \cdots$$

4. 物理学：本征值？本征态？

致每一个阳光下闪烁着七彩光芒的泡沫

To every bubble glittering with colorful lights under the sun

谢谢大家！

祝大家学有所成，考出理想成绩！