分块矩阵和矩阵的秩

潘邹纬

2023 年 12 月 3 日

摘要

这一次课的主要内容是分块矩阵和矩阵的秩，对应 LALU 的 10.2 到 11 节。希望大家听完后，都能借助相关知识，学会解一类基于相抵标准型的常考题目

目录

1 从线性方程组到分块矩阵

作为对矩阵分块，矩阵的秩等内容的引入，考察下面这个线性方程组

例 (二元一次方程组的行视角和列视角). 线性方程组

$$\begin{cases} x+y=5 \\ 2x-y=1 \end{cases}$$

利用矩阵乘法，可以将其写为

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y \\ 2x-y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

从这个矩阵关系到线性方程组，其实相当于对系数矩阵按行分块

$$\left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ \hdashline 2 & -1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\alpha_1)_{1\times 2} \\ (\alpha_2)_{1\times 2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{2\times 1} = \begin{bmatrix} (\alpha_1)_{1\times 2} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{2\times 1} \\ (\alpha_2)_{1\times 2} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{2\times 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

这是所谓的“行视角”，它对应我们对线性方程组的通常看法。然而，如果对系数矩阵按列分块，我们可以得到对线性方程组的另一种看法

$$\left[\begin{array}{c:c} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\beta_1)_{2\times 1} & (\beta_2)_{2\times 1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (x)_{1\times 1} \\ (y)_{1\times 1} \end{bmatrix} = (\beta_1)_{2\times 1}(x)_{1\times 1} + (\beta_2)_{2\times 1}(y)_{1\times 1} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

1×1 矩阵就是一个数，上面的式子意思是

$$x(\beta_1)_{2\times 1} + y(\beta_2)_{2\times 1} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

（画图）也就是说，解上述线性方程组的问题，在列视角下，转化成了寻找适当的系数 x 和 y，使得向量 β_1 和 β_2 线性组合为 $(5,1)^T$。虽然大家还没有学到线性方程组，但我们可以从这个例子中看到问题在列视角下一下子与向量的线性组合联系起来，自然地向量组的秩，向量所属的线性空间的维数，线性无关性等概念就会成为描述线性方程组的工具，而这个观念变化仅仅是因改变同一个矩阵相乘的分块方式带来的

2 分块矩阵及其运算规律

定义 (课本 144 页定义；LALU 定义 10.2). 对于 $m\times n$ 矩阵 A，如果在行的方向分为 s 块，在列的方向分为 t 块，就得到一个 $s\times t$ 分块矩阵，记作

$$A = (A_{kl})_{s\times t}$$

其中 k 从 1 到 s，而 l 从 1 到 t 标记子块的位置

例 (3 × 3 矩阵). 以 *3* 阶方阵为例

$$A = \left[\begin{array}{cc:c} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ \hdashline 7 & 8 & 9 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} (A_{11})_{2\times 2} & (A_{12})_{2\times 1} \\ (A_{21})_{1\times 2} & (A_{22})_{1\times 1} \end{bmatrix}$$

例 (按行或列向量分块). 以 *3* 阶方阵为例，可以按行向量分块为

$$A = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \hdashline 4 & 5 & 6 \\ \hdashline 7 & 8 & 9 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} (\alpha_1)_{1\times 3} \\ (\alpha_2)_{1\times 3} \\ (\alpha_3)_{1\times 3} \end{bmatrix}$$

也可以按列向量分块为

$$A = \left[\begin{array}{c:c:c} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} (\beta_1)_{3\times 1} & (\beta_2)_{3\times 1} & (\beta_3)_{3\times 1} \end{bmatrix}$$

定理 (线性运算规律). 形状相同的分块矩阵做线性运算（加法和数乘），结果等于子块各自做相同的线性运算

定理 (矩阵乘法规律). 设 $A = (a_{ij})_{m\times n}$，$B = (b_{ij})_{n\times p}$（小写代表矩阵元，和大写代表的子块区分），如果把 A, B 分别分块为 $r \times s$ 和 $s \times t$ 分块矩阵，且 A 分块后的行能和 B 分块后的列做矩阵乘法，则

$$AB = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \vdots & \ddots & & \\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rs} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1t} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2t} \\ \vdots & \ddots & & \\ B_{s1} & B_{s2} & \cdots & B_{st} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1t} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2t} \\ \vdots & \ddots & & \\ C_{r1} & C_{r2} & \cdots & C_{rt} \end{bmatrix} = (C_{kl})_{r\times t}$$

其中

$$C_{kl} = A_{k1}B_{1l} + A_{k2}B_{2l} + \cdots + A_{ks}B_{sl}$$

其中 k 从 1 到 r，而 l 从 1 到 t 标记 C 的子块的位置

例 (3 × 3 矩阵). 考虑按行分块的 A

$$A = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \hdashline 4 & 5 & 6 \\ \hdashline 7 & 8 & 9 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} (\alpha_1)_{1\times 3} \\ (\alpha_2)_{1\times 3} \\ (\alpha_3)_{1\times 3} \end{bmatrix}$$

和按列分块的 B

$$B = \left[\begin{array}{c:c:c} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} (\beta_1)_{3\times 1} & (\beta_2)_{3\times 1} & (\beta_3)_{3\times 1} \end{bmatrix} \tag{1}$$

的乘法，为

$$AB=\begin{bmatrix}(\alpha_1)_{1\times3}\\(\alpha_2)_{1\times3}\\(\alpha_3)_{1\times3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(\beta_1)_{3\times1} & (\beta_2)_{3\times1} & (\beta_3)_{3\times1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(\alpha_1)_{1\times3}(\beta_1)_{3\times1} & (\alpha_1)_{1\times3}(\beta_2)_{3\times1} & (\alpha_1)_{1\times3}(\beta_3)_{3\times1}\\(\alpha_2)_{1\times3}(\beta_1)_{3\times1} & (\alpha_2)_{1\times3}(\beta_2)_{3\times1} & (\alpha_2)_{1\times3}(\beta_3)_{3\times1}\\(\alpha_3)_{1\times3}(\beta_1)_{3\times1} & (\alpha_3)_{1\times3}(\beta_2)_{3\times1} & (\alpha_3)_{1\times3}(\beta_3)_{3\times1}\end{bmatrix}$$

由于每一个子块的乘法都是合法的（α 有 3 列而 β 有 3 行），所以这个分块矩阵乘法是可行的，其实这就是矩阵乘法，例如

$$(AB)_{11}=(\alpha_1)_{1\times3}(\beta_1)_{3\times1}=1\times0+2\times3+3\times6$$

例 (不同形状的矩阵的分块乘法). 考虑如下分块的矩阵 A

$$A=\left[\begin{array}{cc:c}1&2&3\\4&5&6\\\hdashline 7&8&9\\0&1&2\\5&6&7\end{array}\right]=\begin{bmatrix}(A_{11})_{2\times2} & (A_{12})_{2\times1}\\(A_{21})_{3\times2} & (A_{22})_{3\times1}\end{bmatrix}$$

和如下分块的矩阵 B

$$B=\left[\begin{array}{cccc:c}1&2&3&0&1\\4&5&6&1&2\\\hdashline 7&8&9&2&3\end{array}\right]=\begin{bmatrix}(B_{11})_{2\times4} & (B_{12})_{2\times1}\\(B_{21})_{1\times4} & (B_{22})_{1\times1}\end{bmatrix}$$

矩阵乘法为

$$\begin{aligned}AB&=\begin{bmatrix}(A_{11})_{2\times2}(B_{11})_{2\times4}+(A_{12})_{2\times1}(B_{21})_{1\times4} & (A_{11})_{2\times2}(B_{12})_{2\times1}+(A_{12})_{2\times1}(B_{22})_{1\times1}\\(A_{21})_{3\times2}(B_{11})_{2\times4}+(A_{12})_{2\times1}(B_{21})_{1\times4} & (A_{21})_{3\times2}(B_{12})_{2\times1}+(A_{22})_{3\times1}(B_{22})_{1\times1}\end{bmatrix}\\&=\left[\begin{array}{cccc:c}30&36&42&8&14\\66&81&96&17&32\\\hdashline 102&126&150&26&50\\18&21&24&5&8\\78&96&114&20&38\end{array}\right]\end{aligned}$$

习题. 请用一般的矩阵相乘计算出上例中的 AB，然后检验每个子块部分的结果是否与分块矩阵乘法给出的表达式一致

例 (部分分块). 对于两个矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 和 $B=(b_{ij})_{n\times p}$ 相乘可以把右边的矩阵按列分块

$$AB=A_{m\times n}\begin{bmatrix}(\beta_1)_{n\times1} & (\beta_2)_{n\times1} & \cdots(\beta_p)_{n\times1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_{m\times n}(\beta_1)_{n\times1} & A_{m\times n}(\beta_2)_{n\times1} & \cdots A_{m\times n}(\beta_p)_{n\times1}\end{bmatrix}$$

也可以把左边的矩阵按行分块

$$AB = \begin{bmatrix} (\alpha_1)_{1\times n} \\ (\alpha_2)_{1\times n} \\ \vdots \\ (\alpha_m)_{1\times n} \end{bmatrix} B_{n\times p} = \begin{bmatrix} (\alpha_1)_{1\times n} B_{n\times p} \\ (\alpha_2)_{1\times n} B_{n\times p} \\ \vdots \\ (\alpha_m)_{1\times n} B_{n\times p} \end{bmatrix}$$

定理 (转置规律). 分块矩阵做转置，先把子块当作数做转置，再把每个子块做转置

例 (3×3 矩阵). 对于

$$A = \left[\begin{array}{cc:c} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ \hdashline 7 & 8 & 9 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} (A_{11})_{2\times 2} & (A_{12})_{2\times 1} \\ (A_{21})_{1\times 2} & (A_{22})_{1\times 1} \end{bmatrix}$$

其转置为

$$A^T = \left[\begin{array}{cc:c} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ \hdashline 3 & 6 & 9 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} (A_{11})^T_{2\times 2} & (A_{21})^T_{1\times 2} \\ (A_{12})^T_{2\times 1} & (A_{22})^T_{1\times 1} \end{bmatrix}$$

可以看到子块也需要转置

希望通过以上实例分析，大家能对分块矩阵的运算更加熟悉。

3 初等变换与分块矩阵

例. 考虑线性方程组

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

系数矩阵为

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

考虑第一章学到的三种初等变换，我们会发现它们都对应一个矩阵左乘系数矩阵，例如第一行的倍乘变换相当于

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} k & k \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

对应的矩阵是单位矩阵第一行的倍乘；换行变换相当于

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

对应的矩阵是单位矩阵的换行；第一行加 k 倍的第二行相当于

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1+2k & 1-k\\ 2 & -1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & k\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{bmatrix}$$

对应的矩阵相当于单位矩阵的第一行加 k 倍的第二行

定义 (课本 135 页定义；LALU 定义 10.1). 初等矩阵是对单位矩阵做一次初等变换得到的矩阵，对应三种初等变换，有三种初等矩阵，具体形式在教材 *136* 页

注. 初等矩阵左乘在矩阵上，相当于对矩阵做对应的初等变换

定理 (课本 137 页). 初等矩阵总是可逆的（初等变换不会改变线性方程组的解）

定理 (课本 132 页). 如果 A 是可逆矩阵，则方程组 $AX=b$ 的唯一解为 $X=A^{-1}b$

例 (课本 132 页例 3). 矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 4\end{bmatrix}$$

的逆，可以借助方程组 $AX=b$ 的解来求解，对增广矩阵

$$\left[\begin{array}{c:c}(A)_{3\times3} & (b)_{3\times1}\end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc:c}1 & -1 & 1 & b_1\\ 0 & 1 & 2 & b_2\\ 1 & 0 & 4 & b_3\end{array}\right]$$

做高斯消元，得

$$\begin{aligned}\left[\begin{array}{ccc:c}1 & -1 & 1 & b_1\\ 0 & 1 & 2 & b_2\\ 1 & 0 & 4 & b_3\end{array}\right] &\to \left[\begin{array}{ccc:c}1 & -1 & 1 & b_1\\ 0 & 1 & 2 & b_2\\ 0 & 1 & 3 & -b_1+b_3\end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc:c}1 & -1 & 1 & b_1\\ 0 & 1 & 2 & b_2\\ 0 & 0 & 1 & -b_1-b_2+b_3\end{array}\right]\\ &\to \left[\begin{array}{ccc:c}1 & 0 & 3 & b_1+b_2\\ 0 & 1 & 2 & b_2\\ 0 & 0 & 1 & -b_1-b_2+b_3\end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc:c}1 & 0 & 0 & 4b_1+4b_2-b_3\\ 0 & 1 & 2 & b_2\\ 0 & 0 & 1 & -b_1-b_2+b_3\end{array}\right]\\ &\to \left[\begin{array}{ccc:c}1 & 0 & 0 & 4b_1+4b_2-b_3\\ 0 & 1 & 0 & 2b_1+3b_2-2b_3\\ 0 & 0 & 1 & -b_1-b_2+b_3\end{array}\right]\end{aligned}$$

或

$$\left[\begin{array}{c:c}(A)_{3\times3} & (b)_{3\times1}\end{array}\right] \to \left[\begin{array}{c:c}(E)_{3\times3} & (A^{-1}b)_{3\times1}\end{array}\right]$$

从而逆矩阵为

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}4&4&-3\\2&3&-2\\-1&-1&1\end{bmatrix}$$

现在我们重新审视这个过程，注意我们首先知道对增广矩阵做初等变换等价于用相应的初等矩阵 P 左乘在增广矩阵上，例如对第一步有

$$\left[\begin{array}{ccc:c}1&-1&1&b_1\\0&1&2&b_2\\1&0&4&b_3\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c}1&-1&1&b_1\\0&1&2&b_2\\0&1&3&-b_1+b_3\end{array}\right]=(P_1)_{3\times3}\left[\begin{array}{ccc:c}1&-1&1&b_1\\0&1&2&b_2\\1&0&4&b_3\end{array}\right]$$

另一方面我们已经知道了分块矩阵的乘法规律，于是上面这步可以写为

$$(P_1)_{3\times3}\left[\begin{array}{c:c}(A)_{3\times3}&(b)_{3\times1}\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c:c}(P_1)_{3\times3}(A)_{3\times3}&(P_1)_{3\times3}(b)_{3\times1}\end{array}\right]$$

上面总共做了五步初等变换，对应最后的结果其实是

$$\begin{aligned}(P_5P_4P_3P_2P_1)_{3\times3}\left[\begin{array}{c:c}(A)_{3\times3}&(b)_{3\times1}\end{array}\right]&=\left[\begin{array}{c:c}(P_5P_4P_3P_2P_1)_{3\times3}(A)_{3\times3}&(P_5P_4P_3P_2P_1)_{3\times3}(b)_{3\times1}\end{array}\right]\\&=\left[\begin{array}{c:c}(E)_{3\times3}&(A^{-1}b)_{3\times1}\end{array}\right]\end{aligned}$$

对比最后一个等号马上就看出来

$$P_5P_4P_3P_2P_1=A^{-1}$$

这个例子给了我们一个很大的经验，总结为下面这条重要的定理

定理 (课本 137 页定理 4.3；LALU 定理 10.1). *任意可逆矩阵可以分解为一系列初等矩阵的乘积*

基于这个定理，我们可以摆脱上述例子中虚设的 X 和 b，如果我们想求方阵 A 的逆，我们可以直接把它和同样大小的单位矩阵拼在一起

$$\left[\begin{array}{c:c}(A)_{3\times3}&(E)_{3\times3}\end{array}\right]$$

由上述定理，A 可以分解为一系列初等矩阵的乘积 $A=P_1P_2\cdots P_n$，如果左乘 $A^{-1}=P_n^{-1}\cdots P_2^{-1}P_1^{-1}$，则左边部分变为单位矩阵，右边部分变为 A^{-1}。换句话说，只需要使用初等行变换把上述矩阵中的左边变成单位矩阵，那右边的结果就是 A 的逆

$$\left[\begin{array}{c:c}(A)_{3\times3}&(E)_{3\times3}\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{c:c}(E)_{3\times3}&(A^{-1})_{3\times3}\end{array}\right]$$

这就是求逆矩阵的初等变换法。

分块矩阵的初等变换是初等变换的推广，常用的分块方式是 2×2 分块，此时的单位阵形为

$$\begin{bmatrix}E&O\\O&E\end{bmatrix}$$

相应的三种初等矩阵如下

定义 (课本 148 页)**.** 2×2 分块下，分块倍乘矩阵为

$$\begin{bmatrix} C & O \\ O & E \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} E & O \\ O & C \end{bmatrix}$$

其中 C 可逆；分块倍加矩阵为

$$\begin{bmatrix} E & O \\ C & E \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} E & C \\ O & E \end{bmatrix}$$

分块对换矩阵为

$$\begin{bmatrix} O & E \\ E & O \end{bmatrix}$$

这些矩阵是对单位矩阵做一次初等变换得到的，将这些初等矩阵作用在分块矩阵上，结果相当于相应的初等变换（具体见 LALU）。

例 (打洞法)**.** 当 A 可逆时，对分块矩阵

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

类似普通矩阵，我们可以通过初等变换消去 C，具体来说，是用第二行减去 CA^{-1} 倍的第一行，得到

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} A & B \\ O & D-CA^{-1}B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & O \\ -CA^{-1} & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

类似可以做列变换消去 B

$$\begin{bmatrix} A & B \\ O & D-CA^{-1}B \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} A & O \\ O & D-CA^{-1}B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & -A^{-1}B \\ O & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ O & D-CA^{-1}B \end{bmatrix}$$

由于初等矩阵的逆是平凡的，借助“分块对角矩阵的逆等于相应各子块的逆组成的分块对角矩阵”，可以达成求解逆矩阵的目的

4 矩阵的秩

定义. *矩阵的秩是线性映射的秩，行秩和列秩是行向量组和列向量组的秩（极大线性无关组中的向量个数）*

行秩和列秩对应的是把方阵进行行分块或列分块后得到的向量组的秩，矩阵的秩是矩阵作为线性映射（或者说其对应的线性映射）的秩，三秩相等定理指出这三个量是一回事

定理 (LALU 定理 11.1)**.**

$$\text{矩阵的秩} = \text{矩阵的行秩} = \text{矩阵的列秩}$$

具体的证明参见 LALU。定理直接的推论是 $r(A) = r(A^T)$，以及 $r(A_{m\times n}) \leq \min\{m, n\}$。

定理中，行秩等于列秩是重要的结论。回忆开头时线性方程组的例子，行分块和列分块对应两种不同的视角：在行视角下，系数矩阵的行秩对应了有效的方程数目，求解整个方程组相当于求这些有效方程组的解；在列视角下，列秩对应了有效的向量数目，求解整个方程组相当于寻找这些向量合理的线性组合。总结为

$$\text{行视角} \to \text{初等变换}$$

$$\text{列视角} \to \text{线性组合}$$

行秩等于列秩说明，有几个有效的线性方程组，就相当于有几个线性无关的列向量来做线性组合。如果我们考虑的是齐次线性方程组 $AX = 0$，则列满秩说明 A 的列向量线性无关，于是马上看出 X 只有零解，行秩等于列秩说明行向量也线性无关，于是初等变换可以把系数矩阵化为单位矩阵，这同样说明 X 只有零解，从方程组的解来看行秩等于列秩是相当直观的。

把这个看法和之前的定理（如果 A 是可逆矩阵，则方程组 $AX = b$ 的唯一解为 $X = A^{-1}b$）联系起来，马上可以得到矩阵可逆的四个等价条件

定理 (LALU 定理 11.3)**.** *对 n 阶方阵 A，下列命题等价：*

1. *A 可逆*
2. *$r(A) = n$*
3. *A 的 n 个行向量线性无关，n 个列向量也线性无关*
4. *齐次线性方程组 $AX = 0$ 只有零解*

另外，我们知道初等变换有三种，其中交换和倍乘肯定不会改变行向量组的秩，而倍加是把行向量 α_i 乘以 k 倍加到 α_j 上，得到的新向量组是 $\beta_j = k\alpha_i + \alpha_j$ 和 $\beta_k = \alpha_k (j \neq k)$，相应的有 $\alpha_j = \beta_j - k\beta_i$ 和 $\alpha_k = \beta_k (j \neq k)$，即两个向量组可以互相表示，这说明变换前后行秩相等。于是，结合三秩相等定理，我们得到如下定理

定理 (课本定理 4.6；LALU 定理 11.10)**.** *初等变换不改变矩阵的秩*

进而，我们可以引入下面的定理

定理 (教材定理 4.7；LALU 定理 11.9)**.** *A 是 $m\times n$ 矩阵，若 $r(A)=r$，则存在可逆矩阵 $P_{m\times m}$ 和 $Q_{n\times n}$，使得*

$$P_{m\times m}A_{m\times n}Q_{n\times n}=\begin{bmatrix}E_r & O\\ O & O\end{bmatrix}=(U_r)_{m\times n}$$

其中 E_r 是 r 阶单位矩阵

这相当于说对于一个秩为 r 的矩阵 A，我们通过一系列初等变换（包括行和列）把它化为行最简形后，得到的是 U_r，即保持秩不变的最简单形式，称其为相抵标准型。

借助初等变换不改变矩阵的秩，还可以得到如下秩关系

定理. *若 P,Q 是可逆矩阵，则 $r(A)=r(PA)=r(AQ)=r(PAQ)$*

这是因为可逆矩阵可以写成若干初等矩阵的乘积，而初等矩阵乘上一个矩阵相当于对矩阵做初等变换（左行右列），又有初等变换不改变矩阵的秩，就得到了上述定理。

定理.

$$|r(A)-r(B)|\leq r(A\pm B)\leq r(A)+r(B)$$

这个定理依然可以用行秩来理解，以 $r(A)>r(B)$ 为例，用 B 的行向量来与 A 的行向量做线性组合，最坏的情况是 B 的极大线性无关行向量组里的每一个向量，都把 A 的极大线性无关行向量组中的向量变成了零矢，这样结果的行秩就减少了 B 的秩个，反之就是 B 的极大线性无关行向量组里每一个都与 A 的行向量无关，这样结果的行秩就增大了 B 的秩个。

定理.

$$r(AB)\leq\min\{r(A),r(B)\}$$

这个定理用初等变换来理解，如果 A 满秩，则可逆，可以分解为一系列初等变换的乘积，从而 AB 的秩序等于 B 的秩，考虑到 A 的秩不大于其列的数目，乘法的合法性说明 A 的列数等于 B 的行数，那么 B 的秩当然也不大于 A 的列数。于是 A 满秩分为两种情况

1. A 的行数大于列数，则 $r(A)$ 等于列数，$r(B)$ 小于等于 $r(A)$ 即自己的行数，min 符号成立
2. A 的行数小于列数，则 $r(A)$ 等于行数，小于 B 的行数即自己的列数，此时 $r(B)$ 受限于其自身的列数，再分类讨论即可

如果是 B 满秩的话，可以转置后考虑，如果都不满秩的话，可以先分解为相抵标准型再考虑，此时不等号出现，这个步骤可以自己思考。

定理.

$$r(A_{s\times n}B_{n\times m})\geq r(A)+r(B)-n$$

用行秩，列秩和初等变换思考的方法与上面类似，当然，上面两个式子回到线性映射的性质证明更一般，详见 LALU。

引入分块矩阵作为工具，我们再引入几个秩关系，首先

定理.

$$r\left(\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}\right) = r(A) + r(B)$$

从行秩角度看即可，上面部分的行向量组后面的分量都为零，所以非零向量肯定与下面部分的行向量组无关。如果觉得这样不直观，也可以借助分块矩阵初等变换来求解，见 LALU。利用分块矩阵初等变换可以证明的还有

定理.

$$r(A) + r(B) + r(D) \geq r\left(\begin{bmatrix} A & D \\ O & B \end{bmatrix}\right) \geq r(A) + r(B)$$

$$r(A) + r(B) + r(C) \geq r\left(\begin{bmatrix} A & O \\ C & B \end{bmatrix}\right) \geq r(A) + r(B)$$

定理.

$$r(ABC) \geq r(AB) + r(BC) - r(B)$$

证明见 LALU。

5 FINAL PROJECT

最后，利用上述知识（主要是分块与相抵标准型），我们来解以下一类常考的存在性问题

例 (21-22 刘，小测; 09-10 期末)**.** A 是秩为 1 的 3×3 矩阵，证明：存在 3×1 矩阵 B 和 1×3 矩阵 C 使得 $A = BC$

例 (20-21 谈，小测 2; 18-19 期末)**.** 设 $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$，$r(A) = r$，$k$ 是满足条件 $r \leq k \leq n$ 的任意整数，证明存在 n 阶方阵 B 使得 $AB = 0$ 且 $r(A) + r(B) = k$.

例 (22-23 期末)**.** 设 A 为 n 阶矩阵，满足 $r(A) = r$，证明：存在可逆的矩阵 P，使得 $P^{-1}AP$ 的后 $n-r$ 列均为 0

例 (22-23 期末)**.** 设 A 为 n 阶矩阵，满足 $r(A) = 1$，且 A 主对角线上的元素之和为 1，证明：$A^2 = A$

习题 (19-20 期末)**.** 设 $A \in M_{m\times s}(\mathbb{R})$，且 $r(A) = r$，证明：存在矩阵 $B \in M_{s\times n}(\mathbb{R})$，使得 $r(B) = \min\{s-r, n\}$ 且 $AB = 0$