1.3.1

$$\text{一方面},\forall x\in A,0\le x\le\sup_{x\in A}x,\forall y\in B,0\le y\le\sup_{y\in B}y,\text{故}0\le xy\le\sup_{x\in A}x\cdot\sup_{y\in B}y$$

$$\sup_{x\in A,y\in B}xy\le\sup_{x\in A}x\cdot\sup_{y\in B}y(\text{def:最小的上界})$$

$$\text{另一方面},\forall x\in A(\text{对于给定的}x),xy\le\sup_{x\in A,y\in B}xy,\text{知}x\cdot\sup_{y\in B}y\le\sup_{x\in A,y\in B}xy,$$

$$\text{从而}\sup_{x\in A}x\cdot\sup_{y\in B}y\le\sup_{x\in A,y\in B}xy$$

1.4.1

1. 确界原理证明单调有界定理

证 不妨设$\{a_n\}$为有上界的递增数列. 由确界原理, 数列$\{a_n\}$有上确界, 记$a=\sup\{a_n\}$. 下面证明a就是$\{a_n\}$的极限. 事实上, 任给$\varepsilon>0$, 按上确界的定义, 存在数列$\{a_n\}$中某一项a_N, 使得$a-\varepsilon>a_N$. 又由$\{a_n\}$的递增性, 当$n\geqslant N$时有$a-\varepsilon<a_N\leqslant a_n$.

另一方面, 由于a是$\{a_n\}$的一个上界, 故对一切a_n都有$a_n\leqslant a<a+\varepsilon$. 所以当$n\geqslant N$时有

$$a-\varepsilon<a_n<a+\varepsilon,$$

这就证得$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$. 同理可证有下界的递减数列必有极限, 且其极限即为它的下确界.

5. 确界原理证明Cauchy收敛准则

即数列$\{x_n\}$收敛 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，当n，$m>N$时有$|x_n-x_m|<\varepsilon$

必要性:略

充分性:

① 构造非空有界数集S，因为欲证明数列$\{x_n\}$收敛，故数集S 必须含有数列$\{x_n$中的无限多个数，为此，令$S=x\mid\{(-\infty,x)\cap\{x_n\}$是空集或有限点集$\}$；

②由于满足Cauchy收敛准则充分条件的数列是有界的，故知数列$\{x_n\}$的下界$a\in S$，上界b也是S 的上界, 所以S 是非空有上界的数集 由确界原理数集S 有上确界$\zeta=\sup S$；

③ 对$\varepsilon>0$，$(-\infty,\zeta)\cap\{x_n\}$是无限点集，否则，就与$\zeta=\sup S$矛盾

因$(-\infty,\zeta-\varepsilon)\cap\{x_n\}$至多含有$\{x_n\}$的有限多个点 故$(\zeta-\varepsilon,\zeta+\varepsilon)$含有

$\{x_n\}$的无限多个点 设$x_{n_k}\in(\zeta-\varepsilon,\zeta+\varepsilon)$，$k=1,2,\cdots$，且$n_1<n_2<\cdots$

取$N_1=\max\{N,n_1\}$，则当$n>N_1$时，总存在$n_k>N_1$使

$x_n-\zeta\leqslant|x_n-x_{n_k}|+|x_{n_k}-\zeta|<2\varepsilon$，

因此$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\zeta$.

2.确界原理证明区间套定理

证明：1　设$\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$是一个闭区间套，即满足：

1）　$\forall n$，$[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$；

2）　$\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$

我们证明，存在唯一的实数ξ，使得$\xi \in [a_n, b_n]$，（n ＝1，2，…）

存在性：令$S = \{a_n\}$，显然，S非空且有上界（任一b_n都是其上界）. 据确界原理，S

确界原理证明致密性定理

设数列$\{x_n\}$是有界数列，定义数集$S = \{x \mid \{x_n\}$中大于x的点有无穷多个$\}$，因$\{x_n\}$有界，所以由确界存在定理知S必有上确界，设$\xi = \sup S$。

由$\xi = \sup S$知，$\forall \varepsilon > 0$，$\xi - \varepsilon$不是S的上界，所以$\{x_n\}$中大于$\xi - \varepsilon$的项有无穷多个；而$\xi + \varepsilon$是S的上界，所以$\{x_n\}$中大于$\xi + \varepsilon$的项只有有限项，故在$(\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon)$中有$\{x_n\}$的无穷多项。

取$\varepsilon = 1$，则$\{x_n\}$中存在一项x_{n_1}使$|x_{n_1} - \xi| < 1$；

取$\varepsilon = \frac{1}{2}$，则$\{x_n\}$中存在一项$x_{n_2}$ $(n_2 > n_1)$使$|x_{n_2} - \xi| < \frac{1}{2}$；

$\vdots$

取$\varepsilon = \frac{1}{k}$，则$\{x_n\}$中存在一项$x_{n_k}$ $(n_k > n_{k-1})$使$|x_{n_k} - \xi| < \frac{1}{k}$；

由此得到$\{x_n\}$的一个子数列$\{x_{n_k}\}$收敛于ξ，所以数列$\{x_n\}$存在收敛子数列。

3.确界原理证明有限覆盖定理

即闭区间$[a, b]$的任一开覆盖H 都有有限的子覆盖

证① 令$S = \{x \mid a < x \leqslant b$，$[a, x]$能被H 中有限个开区间覆盖$\}$；

②显然S有上界　因H 覆盖闭区间$[a, b]$，所以，存在一个开区间$(\alpha, \beta) \in H$ 使$a \in (\alpha, \beta)$　取$x \in (\alpha, \beta)$，则$[a, x]$能被H中有限个开区间覆盖　从而，$x \in S$，故S 非空；

③ 由确界原理存在$\zeta = \sup S$；

④ 现证$\zeta = b$　用反证法　若$\zeta \neq b$，则$a < \zeta < b$　由H 覆盖闭区间$[a, b]$，一定存在$(\alpha_1, \beta_1) \in H$，使$\zeta \in (\alpha_1, \beta_1)$　取x_1，x_2使$\alpha < x_1 < \zeta < x_2 < \beta_1$，且$x_1 \in S$　则$[a, x_1]$能被H 中有限个开区间覆盖，把(α_1, β_1)加进去，就推得$x_2 \in S$　这与$\zeta = \sup S$ 矛盾，故$\zeta = b$，即定理结论成立

1.4.2

7. 单调有界定理证明区间套定理

若$\{[a_n, b_n]\}$是一个区间套,则在实数系中存在唯一的一点ξ,使得$\xi\in[a_n, b_n]$, $n=1,2,\cdots$,即

$$a_n\leqslant \xi\leqslant b_n,\quad n=1,2,\cdots.\quad (1)$$

证：$\{a_n\}$为递增有界数列,依单调有界定理,$\{a_n\}$有极限ξ,且有

$a_n\leqslant \xi$, $n=1,2,\cdots.$ (2)

同理,递减有界数列$\{b_n\}$也有极限,并按区间套的条件有

$\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\xi$, (3)

且$b_n\geqslant \xi$, $n=1,2,\cdots.$ (4)

联合(2)、(4)即得(1)式.

最后证明满足(2)的ξ是唯一的.设数ξ'也满足

$a_n\leqslant \xi'\leqslant b_n$, $n=1,2,\cdots$,

则由(1)式有

$|\xi-\xi'|\leqslant b_n-a_n$, $n=1,2,\cdots.$

由区间套的条件得

闭区间套证明有限覆盖

证1用反证法

(1)要证明的整体性质p是：闭区间$[a, b]$能用H 中的有限个开区间覆盖.与p相反的性质p^{-1}是：闭区间$[a, b]$不能用H中的有限个开区间覆盖；

(2) 假设闭区间$[a, b]$有性质p^{-1} 将闭区间$[a, b]$等分为两个闭区间，则至少有一个闭区间$[a_1, b_1]$也有性质p^{-1} 否则，$[a, b]$有性质p 如此继续得一闭区间列，使每个闭区间都有性质

p^{-1}，且$[a, b]\supset[a_1, b_1]\supset\cdots\supset[a_n, b_n]\supset\cdots$；

$$\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}(b_n-a_n)=0$$

(2)由闭区间套定理得数ξ属于所有的闭区间$[a_n, b_n]$，$n=1$，2，…，并且每个闭区间$[a_n, b_n]$有性质p^{-1}；

④ 由$\zeta\in[a, b]$和H 是$[a, b]$的开覆盖，有ζ属于H 中的某个开区间

$\zeta\in\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]\subset(\alpha_1,\beta_1)$，和

$$\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$$

可知，存在自然数m，使$[a_m, b_m]\subset(\alpha_1, \beta_1)$ 这与$[a_m, b_m]$具有性质p^{-1}矛盾

致密性定理证明柯西收敛原理

由柯西条件知，取$\varepsilon=1$，$\exists N_0$，$m, n>N_0$有$|x_m-x_n|<1$，取$m=N_0+1$，则

有 $\left| x_{N_0+1} - x_n \right| < 1$，即 $\left| x_n \right| \leqslant \left| x_{N_0+1} \right| + 1$，令 $M = \max\{|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_{N_0}|, |x_{N_0+1}|+1\}$，则对一切 n 有 $|x_n| \leqslant M$，故 $\{x_n\}$ 为有界数列。

根据致密性定理知 $\{x_n\}$ 必存在收敛的子列 $\{x_{n_k}\}$ 设 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = \xi$。

下面证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \xi$。

由柯西条件及 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = \xi$ 知，$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N$，当 $m, n, k > N$ 时有 $\left| x_m - x_n \right| < \varepsilon$ 和 $|x_{n_k} - \xi| < \varepsilon$ 同时成立。

当 $n > N$ 时，取 $m = n_k$ $(\geqslant k > N)$ 时得 $\left| x_n - \xi \right| \leqslant |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - \xi| < 2\varepsilon$。

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \xi$。

1.4.3

$$\text{即证}\inf\{f(x)+g(x)\} - \sup g(x) \le \inf f(x)$$
$$\text{易得}\inf\{f(x)+g(x)\} - \sup g(x) \le \inf\{f(x)+\sup g(x)\} - \sup g(x) \le \inf f(x)$$

1.4.4

确界原理 :构造集合$A:\{x: f(x)\ge x^2\}$, 集合一定非空(0)有界($[0,1]$), 由确界原理$x_0 \in [0,1] = \sup A$

若$y_0 = f(x_0) > x_0^2 \to f(\sqrt{y_0}) \ge f(x_0) = y_0 = \sqrt{y_0^2} \to \sqrt{y_0} \in A \to \sqrt{y_0} \le \sup A = x_0$

$\to y_0 \le x_0^2$, 矛盾

若$y_0 = f(x_0) < x_0^2, \exists x_1 \in A$使$\sqrt{y_0} < x_1 \le x_0 \to f(x_0) \ge f(x_1)$, 但$f(x_0) = y_0 < x_1 \le f(x_1)$, 矛盾

因此$f(x_0) = x_0^2$

区间套定理 :记$g(x) = x^2 - f(x), g(0) < 1, g(1) > 0$, 将$[0,1]$二等分

若等分点处$g(x) = 0$, 问题解决

若等分点处不等于0, 那么一定能够取出端点异号的二等分子区间, 则能够构造出区间套列$[a_n, b_n]$

由区间套定理，$[a_n, b_n]$存在唯一公共点$\xi \in [a_n, b_n]$, $|a_n - \xi| \le |b_n - a_n| \to 0$, 即$a_n \to \xi$, 同理

$b \to \xi$

因$f(\xi)$单调递增，$a_n^2 \le f(a_n) \le f(\xi) \le f(b_n) \le b_n^2, n \to \infty$时, $a_n^2 \to \xi^2, b_n^2 \to \xi^2$, 夹逼定理

$f(\xi) = \xi^2$

1.4.5

$\forall \epsilon > 0, \exists \delta_x > 0$, 使得$(x_0 - \delta_x, x_0 + \delta_x) \cap [a,b]$内有$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$

取定$\epsilon = 1, |f(x)| \le |f(x_0)| + 1$

由有限覆盖定理，一定能找到有限(t)个开区间$U(x_n, \delta_n)$覆盖$[a,b]$

因此, $|f(x)| < t + \sum\limits_{i=1}^{t} |f(x_i)|$

1.4.6

只需要证明$\forall \xi', \xi'' \in (a,b)$, 有$\xi' < \xi''$时有$f(\xi') < f(\xi'')$

由有限覆盖定理，我们可以找出n个邻域满足(1)第一个以ξ'为中心，第n个以ξ''为中心(2)任意两个均有交集

构造n个中心点和交集点列即可

2.4.1

1.$\{0,1,0,1\cdots\}$

2.$\lim\limits_{k\to+\infty} a_{n_k} = a = \sup a_{n_k}, \forall \epsilon > 0, \exists k_0, a - \epsilon < a_{n_{k_0}} \le a$. 取$N = n_{k_0}, \forall n > N$均可找到$n_k > n$,

有$a - \epsilon < a_{n_{k_0}} \le a_n \le a_{n_k} \le a < a + \epsilon$.

3T,4F

2.4.2

$$1.\mathrm{F},2.\mathrm{F},3.\mathrm{T}$$

2.4.3

$$1.a_n=\sqrt{n},\frac{p}{\sqrt{n+p}+\sqrt{n}}\to 0,\mathrm{F},2.\mathrm{T},3.\mathrm{F}$$

2.4.5

初等变形：

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{2i-1}{n^2}a&=\frac{1}{2\sin\frac{a}{n^2}}\sum_{i=1}^{n}2\sin\frac{2i-1}{n^2}a\sin\frac{a}{n^2}\\&=\frac{1}{2\sin\frac{a}{n^2}}\sum_{i=1}^{n}\left(\cos\frac{2i-2}{n^2}a-\cos\frac{2i}{n^2}a\right)\\&=\frac{1}{2\sin\frac{a}{n^2}}\left(1-\cos\frac{2}{n}a\right)=\frac{1}{\sin\frac{a}{n^2}}\sin^2\frac{a}{n}\\&=\frac{\frac{a}{n^2}}{\sin\frac{a}{n^2}}\cdot\frac{\left(\sin\frac{a}{n}\right)^2}{\left(\frac{a}{n}\right)^2}\cdot a\to a\ (n\to\infty).\end{aligned}$$

拟合法：

证 我们注意到 $a=\sum_{i=1}^{n}\frac{2i-1}{n^2}a$，从而

$$|x_n-a|=\left|\sum_{i=1}^{n}f\left(\frac{2i-1}{n^2}a\right)-\sum_{i=1}^{n}\frac{2i-1}{n^2}a\right|\leqslant\sum_{i=1}^{n}\left|f\left(\frac{2i-1}{n^2}a\right)-\frac{2i-1}{n^2}a\right|. \quad (1)$$

若我们能证明：$\forall\varepsilon>0$，n 充分大时，

$$\left|f\left(\frac{2i-1}{n^2}a\right)-\frac{2i-1}{n^2}a\right|<\frac{2i-1}{n^2}\varepsilon\quad(i=1,2,\cdots,n), \quad (2)$$

则 式(1)右端 $\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{2i-1}{n^2}\varepsilon=\varepsilon$.

问题获证．要证明式(2)，亦即要证明

$$\left|\frac{f\left(\frac{2i-1}{n^2}a\right)}{\frac{2i-1}{n^2}a}-1\right|<\frac{\varepsilon}{a}. \quad (3)$$

事实上，因为 $f(x)\sim x\ (x\to0)$，因此 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $0<|x|<\delta$ 时，有

$$\left|\frac{f(x)}{x}-1\right|<\frac{\varepsilon}{a}. \quad (4)$$

于是，令 $N=\frac{2a}{\delta}$，则 $n>N$ 时，$0<\frac{2i-1}{n^2}a<\delta\ (i=1,2,\cdots,n)$．从而按式(4)有式(3)成立.

2.4.6

1.

$$\begin{aligned}x_n&=\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2^3}\cdots\cos\frac{x}{2^n}=\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}\\&=\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}\to\frac{\sin x}{x}\ (\text{当 } n\to\infty \text{ 时})\ (x\neq0).\end{aligned}$$

2.

因 $n\to\infty$ 时，

$$n\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}-1\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{a^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}+\frac{b^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}\right)\to\frac{1}{2}(\ln a+\ln b),$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left\{\left[1+\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}-1\right)\right]^{\frac{1}{\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}-1}}\right\}^{n\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}-1\right)}$$

$$=e^{\frac{1}{2}(\ln a+\ln b)}=e^{\ln\sqrt{ab}}=\sqrt{ab}.$$

3.

$1\leqslant(n!)^{\frac{1}{n^2}}\leqslant(n^n)^{\frac{1}{n^2}}=n^{\frac{1}{n}}$. 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}n^{\frac{1}{n}}=1$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n^2}}=1$.

4.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}=\exp\left[\lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{\ln(n!)}{n}\right)\right]=\exp\left[-\lim_{n\to+\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}\ln k}{n}\right]$$

$$=\exp\left[-\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(n+1)}{(n+1)-n}\right]\quad(\text{Stolz 公式})$$

$$=\exp\left[-\lim_{n\to+\infty}\ln(n+1)\right]=0.$$

5.

$$\text{原极限}=\lim_{x\to\infty}x\left(\sqrt[6]{1+\frac{1}{x}}-\sqrt[6]{1-\frac{1}{x}}\right)$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(\frac{t}{6}-\left(-\frac{t}{6}\right)+o(t)\right)=\frac{1}{3}$$

2.4.7

1. $\because 0<a<\dfrac{\pi}{2}, x_0=a$

$\therefore 0<x_n=\sin x_{n-1}<x_{n-1}<\dfrac{\pi}{2}$

x_n单调递减并存在下界0, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在。记 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A, A=\sin A, A=0$

2.要证 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\dfrac{n}{3}}x_n=1$，即证 $\lim\limits_{n\to\infty}nx_n^2=3$, 即证 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\frac{1}{x_n^2}}=3$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{x_n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n-(n-1)}{\frac{1}{x_n^2}-\frac{1}{x_{n-1}^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{\sin^2 x_{n-1}}-\frac{1}{x_{n-1}^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n-1}^2\sin^2 x_{n-1}}{x_{n-1}^2-\sin^2 x_{n-1}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin^2 x}{x^2-\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{(x+\sin x)(x-\sin x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{(2x+o(x))(\frac{x^3}{6}+o(x^3))}=3$$