2022-2023学年秋冬学期竺院数分I辅学授课
一元函数的极限与连续性

授课人：潘昶皓　时间：2023-10-28

1. 函数极限

【定义】关于函数（左、右）极限的定义的关键词： **去心邻域** 、$\epsilon-\delta$ **语言**

【研究范围】相比于数列极限更加复杂
定义域包括$x\to\infty, x\to+\infty, x\to-\infty, x\to x_0, x\to x_0+, x\to x_0-$
值域包括$f(x)\to A, f(x)\to+\infty, f(x)\to-\infty, f(x)\to\infty$

【例题1】利用定义法证明：

$$若\lim_{x\to x_0} f(x_0)=A,则\lim_{x\to x_0}\sqrt[n]{f(x_0)}=\sqrt[n]{A}\quad(其中A>0)$$

【简单的性质】类似于数列极限，函数极限同样具有以下性质：

- 唯一性
- 局部有界性
- 局部保号性
- 局部保序性
- 极限的四则运算（在$x\to x_0$的情况下）
- 夹逼准则

【例题2】求以下函数的极限：

$$\lim_{x\to1}\frac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x-1},\forall n\in\mathbb{N}^*$$

【复合函数的极限】假设 $f(x)\in C(D_x), g(u)\in C(D_u)$ ，其中 D_x, D_u 为 $f(x)$ 与 $g(u)$ 的定义域，并假设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=u_0, \lim\limits_{u\to u_0} g(u)=A$ ，则有 $\lim\limits_{x\to x_0} g(f(x))=A$（此条件为充分条件；能否给出不连续情况下的反例？）

【推论：指数型极限】假设 $f(x)\in C(D_x), g(x)\in C(D_x), \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A, \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B,$ 则有 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}=A^B$

【一些需要掌握的定理】

- 海涅定理(Heine)
- 单调收敛定理
- 柯西收敛定理的函数形式

2. 两大重要函数极限

重要极限1： $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x}{x}=1$(利用夹逼原理证明)

【例题3】求以下函数的极限：

$$\lim_{x\to x_0}\frac{1-\cos x}{\tan^2 x}$$

重要极限2： $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$(利用夹逼原理证明)

【例题4】求以下数列的极限：

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{a}{n}+\frac{a^2}{2n^2})^{-n}$$

【例题5】求以下数列的极限：

$$\lim_{n\to\infty}\cos^n(\frac{x}{\sqrt{n}}),\forall x\in\mathbb{R}$$

【例题6】设 $f(x)$ 在 $x=2$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=2$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(e^{x^2}+\cos 2x)}{\ln(1+x^2)}=$（　　　　）

3. 无穷小量，无穷大量及其量阶表示

无穷小量的定义

【定义】若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$，则称当 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 是无穷小量，类似地我们可以定义无穷大量。

需要注意的是，无穷小量是一个变量而不是一个常量。

小 o 记号和大 0 记号

【定义】若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)/g(x)=0$，则称$f(x)=o(g(x))$ $(x\to x_0)$

【定义】若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\le Cg(x),C\in\mathbb{R}$，则称 $f(x)=O(g(x))$ $(x\to x_0)$（我们常用 $O(1)$ 来表示有界量）

无穷小量的量阶表示

- 同阶无穷小量$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)/g(x)=C\neq 0$
- 高阶无穷小量$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)/g(x)=0$

等价函数

【定义】若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)/g(x)=1$，则称 $f(x)\sim g(x)$ $(x\to x_0)$

【定理1】$f(x)\sim g(x)$ $(x\to x_0)\Leftrightarrow f(x)=g(x)+o(f(x))=g(x)+o(g(x))$

【等价替换定理】

$$若f_1(x)\sim f(x),g_1(x)\sim g(x)\ (x\to x_0),且有\lim_{x\to x_0}\frac{f_1(x)}{g_1(x)}=A$$
$$则有\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f_1(x)}{g_1(x)}=A$$

需要注意的是，等价替换定理只能在乘除法中进行

【常用的等价替换】

- $\sin x=x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)$
- $e^x=1+x+o(x)$
- $\ln(x+1)=x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$
- $(1+x)^\alpha=1+\alpha x+o(x)$

相关例题

【例题7】下述关于高阶无穷小量的表述中不成立的是（　　）。

$A.\ x\cdot o(x^2)=o(x^3),\ x\to 0$

$B.\ o(x^2)+o(x^3)=o(x^2),\ x\to 0$

$C.\ o(x)\cdot o(x^2)=o(x^3),\ x\to 0$

$D.\ o(x^2)+o(x)=o(x^2),\ x\to 0$

【例题8】求极限

$$\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}$$

4. 连续函数

【连续的定义】连续，左连续，右连续，定义都是通过 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$

【间断点】若 $f(x)$ 在 x_0 处不连续，则称 x_0 为间断点，间断点的类型如下：

- 跳跃间断点：$\lim\limits_{x\to x_0+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0-}f(x)$
- 极限不存在：$\lim\limits_{x\to x_0+}f(x),\lim\limits_{x\to x_0-}f(x)$ 中至少有一个不存在
- 可去间断点：$\lim\limits_{x\to x_0+}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0-}f(x)=A\neq x_0$

考虑迪利克雷函数和黎曼函数的连续性,判断不连续点的特性

【定理】在区间 $[a,b]$ 上的单调函数的不连续点必为跳跃间断点。

【例题9】$f(x)=\dfrac{x^2-1}{x(x+1)\ln|x|}$ 的可去间断点的个数为（）

【简单的性质】关于连续函数，具有以下性质：

- 局部有界性
- 局部保号性
- 局部保序性
- 连续函数的四则运算（在$x\to x_0$的情况下）
- 复合函数的连续性

【定理】一切初等函数在其定义区间上连续

【定理】反函数连续性定理：设 $y=f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续且严格单调增加， $f(a)=\alpha,f(b)=\beta$ ，则反函数 $x=f^{-1}(y)$ 在$[\alpha,\beta]$ 上连续且严格单调增加。

5. 闭区间上的连续函数

在闭区间上的连续函数会有很多良好的性质，我们在做题过程中若发现给出的是闭区间上的连续函数，则一定需要考虑以下的性质。

牵扯到闭区间时，我们也可以优先考虑有限覆盖定理（回忆一下有限覆盖定理是什么？）

- **有界性定理**：闭区间上的连续函数一定有界
- **最值定理**：闭区间上的连续函数存在最大值和最小值。

- **介值定理**：闭区间上的连续函数的值域一定是一个闭区间
- **零点存在定理**：介值定理的特殊情况（二分法判断零点）

【例题10】下列说法正确的是：（多选）

$A.$ 如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 f 的值域为一区间.

$B.$ 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有定义，且其值域为一区间，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续。

$C.$ 如果 $f(x)$ 在 (a,b) 上连续，且 $f(a+0),f(b-0)$ 存在，则 $f(x)$ 在 (a,b) 上有界.

$D.$ 如果 $f(x)$ 在 (a,b) 上连续且有界，则 $f(a+0),f(b-0)$ 存在.

6. 一致连续

一致连续的定义？（δ 只与 ϵ 有关而与具体的 x_0无关）

关于一致连续，需要掌握 2 种判定方法：

- 1. 已知 $f(x)\in C(I),f(x)$ 在 I 上一致连续$\Longleftrightarrow$对任何点列$\{x_n^{(1)}\}$ 和 $\{x_n^{(2)}\},x_n^{(1)},x_n^{(2)}\in I$，只要满足 $\lim_{n\to\infty}(x_n^{(1)}-x_n^{(2)})=0$，就有 $\lim_{n\to\infty}\left(f(x_n^{(1)})-f(x_n^{(2)})\right)=0$
- Cantor 定理：闭区间上连续的函数一定一致连续。

【例题11】

$$f(x)\in C[a,+\infty),若\lim_{x\to+\infty}f(x)=A\in\mathbb{R},证明:f(x)在[a,+\infty)上一致连续$$

【例题12】

$$已知f(x)在[0,+\infty)上已知连续，且对于\forall x\in(0,+\infty),\lim_{n\to\infty}f(x+n)=0.\ 求证\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$$

最后来一点小测复习的判断题？

- $f(x)$ 在$[0,+\infty)$ 上有界连续，则 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续。
- 若 $f(x),g(x)$ 在区间 I 上一致连续，则 $f(x)g(x)$ 在区间 I 上一致连续。
- 如果 $f(x)$ 在 $(a,\,+\infty)$ 上一致连续，则 $f(a+0),\ f(+\infty)$ 存在。（$a\in\mathbb{R}$）
- 一个一致连续的函数，若其存在反函数，其反函数也一定一致连续。
- 若函数 $f(x)$ 在开区间 I_1 和 I_2 内均一致连续，则 $f(x)$ 在 $I_1\cup I_2$ 上一致连续。
- 设 $\{a_n\},\{b_n\}$ 均为非负的发散数列，则$\{a_nb_n\}$ 也一定为发散数列。
- 若数列 $\{x_n\}$ 收敛，$\{y_n\}$ 发散，则 $\{x_n+y_n\}$ 必发散
- 设 $\{a_n\},\{b_n\}$ 均正项发散数列，则$\{a_n+b_n\}$ 也一定为发散数列。