一、微分中值定理

Fermat 引理:
如果函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 在点 $c\in(a,b)$ 可微，并且 c 是 f 在区间 $[a,b]$ 上的局部极值点（局部最大或最小），那么 $f'(c)=0$。

Rolle 定理:
如果函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可微。如果 $f(a)=f(b)$，则存在至少一个点 $c\in(a,b)$，使得 $f'(c)=0$。

Lagrange 中值定理:
如果函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$，如果它在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可微，则存在至少一个点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$。

Cauchy 中值定理:
考虑两个函数 $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$，如果它们在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可微，并且 $g'(x)\neq 0$ 对所有 $x\in(a,b)$ 都成立，则存在至少一个点 $\xi\in(a,b)$，使得 $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$。

【例 1.0】

- 试证明在 $\mathbb{R}$ 上导函数恒大于 0 的函数单调递增。

> `hint.`
>
> 中值定理是连接原函数和导函数的桥梁。

【例 1.1】

- 试证明**单侧导数极限定理**：若 f 在 $x=a$ 的半边空心邻域 U_+^o 可导，在半边实心邻域 U_+ 连续，如果 $\lim\limits_{x\to a^+}f'(x)=l$ 有限，那么 f 在 a 处右导数存在且等于 l。

【例 1.2】

- 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，$f(a)=0$ 且 $f(x)>0$ $(a<x<b)$。证明不存在常数 $m>0$，使得 $|\frac{f'(x)}{f(x)}|\le m$ 对 $\forall x\in(a,b)$ 成立。

【例 1.3】

- 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 上可导，且 $f(0)=f(1)=0, f(\frac{1}{2})=1$，证明:
  - 存在 $\xi \in (\frac{1}{2},1)$，使得 $f(\xi)=\xi$;
  - 对于任意实数 λ 必存在 $\xi \in (0,\xi)$，使得:

$$f'(\eta)-\lambda[f(\eta)-\eta]=1$$

> `hint.`
>
> 事实上，单纯的使用中值定理，往往只能得到有限的信息。换一个函数使用中值定理，可以得到全新的结论，获得导数和原函数的更多信息。

【例 1.4】

- 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续 $(a>0)$，在 (a,b) 上可导，$f(a)\neq f(b)$，求证:
  $\exists \xi,\eta \in (a,b), f'(\xi)=\frac{a+b}{2\eta}f'(\eta)$。

二、Taylor 公式

Peano 余项:

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+o((x-a)^n)$$

Lagrange 余项:

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}\ (\xi \text{ 介于}x\text{，}a\text{之间})$$

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots$$

$$\sin(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots$$

$$\cos(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots$$

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}x^4 + \cdots$$

> 回忆：二项式系数 $\binom{n}{\alpha}$。

> **定理**：设 $f(x)$ 在 x_0 的某个邻域有 $n+2$ 阶导数存在，则它的 $n+1$ 次 Taylor 多项式的导数恰好是 $f'(x)$ 的 n 次 Taylor 多项式。
>
> 应用：$\arctan(x)$ 。

我们还可以对 Taylor 公式进行四则运算以及复合的操作。一个有趣的例子：

【例 2.0】

- 求 $\tan(x)$ 的麦克劳林级数，展开到 x^5。

我们来看一些 Taylor 公式的应用。

【例 2.1】【等价无穷小量到底能不能加减？！？】

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - \sin x}{x^3}$$

> 所以最保险的方法就是把无穷小量全部写出来，这样还是一个等式。

【例 2.2】

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{e - (1+\frac{1}{x})^x}$$

> `hint.`
>
> Taylor 展开其实就是告诉你，如何把一个函数变成等价无穷小量。
>
> 课本中有很多很好的计算题，大家可以全部刷一下。这里就不再补充用 Taylor 公式的极限计算题了。

Taylor 展开还有一些很有趣的应用，不止书上写的那几个。

【例 2.3】【2022 年秋学期第二次小测】

$$f(x)=e^{-x^2},\ f^{(2022)}(0)=\_\_\_\_\_\_。$$

【例 2.4】【2022 年秋学期第二次小测】

- 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处二阶可导，且有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-xf(x)}{x^3}=0$$

- 求 $f(0), f'(0), f''(0)$。

> 如果你不知道我现在在讲 Taylor 公式，你还能做得出来嘛?

【例 2.5】

- 设 $f(x)$ 是定义在 $[-1,1]$ 的函数，且 $f'(0)$ 存在，证明：

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}[f(\frac{k}{n^2})-nf(0)]=\frac{f'(0)}{2}$$

> 【Bonus】如果你能不用中值定理和 Taylor 公式，只用导数的定义解决这个题，我请你喝一杯奶茶~

最后让我们来看这次的重头戏。

事实上我们可以发现，Taylor 公式就是拉格朗日中值定理的超级加强版。所以这也提示我们，Taylor 公式是联系函数各阶导数的桥梁。

【例 2.6】

- 设 f 在 $(0,+\infty)$ 上二阶可导，且 $a=\sup\{|f(x)|\},b=\sup\{|f''(x)|\}$，证明：$\sup\{|f'(x)|\}\leq 2\sqrt{ab}$。

【例 2.7】

- 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，$f(a)=f(b)=0$，证明：

$$\max_{a\leq x\leq b}|f(x)|\leq\frac{1}{8}(b-a)^2\max_{a\leq x\leq b}|f''(x)|$$

> `hint.`
>
> 在哪个点处展开？代入什么值？然后怎么做？

【例 2.8】

- 设 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上有二阶可导且满足 $|f''(x)\geq\frac{1}{a}|$，且 $f(x)$ 在 $(0,a)$ 上存在最大值 M，$f(0)+f(a)=a$，证明 $M\geq\frac{5}{8}a$.

最后我们以一个很有趣的计算技巧来为这次课程收尾。

【较难】【例 2.9】

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+\ln(1+x))^{\frac{1}{\tan x}}-e(1-x)}{x^2}$$

后面大家学到定积分以后，还会出现和 Taylor 展开结合的很有趣的题目（套路）。希望大家遇到的时候可以回想起今天讲过的内容（心虚）！