一、微分中值定理

Fermat 引理:
如果函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 在点 $c\in(a,b)$ 可微，并且 c 是 f 在区间 $[a,b]$ 上的局部极值点（局部最大或最小），那么 $f'(c)=0$。

Rolle 定理:
如果函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可微。如果 $f(a)=f(b)$，则存在至少一个点 $c\in(a,b)$，使得 $f'(c)=0$。

Lagrange 中值定理:
如果函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$，如果它在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可微，则存在至少一个点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$。

Cauchy 中值定理:
考虑两个函数 $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$，如果它们在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可微，并且 $g'(x)\neq 0$ 对所有 $x\in(a,b)$ 都成立，则存在至少一个点 $\xi\in(a,b)$，使得 $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$。

【例 1.0】

- 试证明在 $\mathbb{R}$ 上导函数恒大于 0 的函数单调递增。

> `hint.`
>
> 中值定理是连接原函数和导函数的桥梁。

【例 1.1】

- 试证明**单侧导数极限定理**：若 f 在 $x=a$ 的半边空心邻域 U_+^o 可导，在半边实心邻域 U_+ 连续，如果 $\lim\limits_{x\to a^+}f'(x)=l$ 有限，那么 f 在 a 处右导数存在且等于 l。

这个定理用来证明关于补充定义函数的导数存在非常好用。

单侧导数极限定理的严谨证明：

由于在半边实心邻域连续，根据拉格朗日中值定理：

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(\xi),\xi\in(a,x)$$

不妨设 $\lim\limits_{x\to a}f'(x)=G.$

对于 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\text{s.t. }\forall x\in(a,a+\delta),|f'(x)-G|<\varepsilon$。则此时对于同样的 $\varepsilon,\delta,\forall x\in(a,a+\delta)$ 也有

$$|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-G|=|f'(\xi)-G|<\varepsilon$$

得证。

【例 1.2】

- 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，$f(a)=0$ 且 $f(x)>0\ (a<x<b)$。证明不存在常数 $m>0$，使得 $|\frac{f'(x)}{f(x)}|\le m$ 对 $\forall x\in(a,b)$ 成立。

假设存在 m 成立，我们下面用反证法推出矛盾。

显然，$\frac{f'(x)}{f(x)}\le m,f'(x)-mf(x)\le 0$。好像没法往下做了？

构造函数以获得新条件，设 $g(x)=\frac{f(x)}{e^{mx}}$，则有：

$$g'(x)=\frac{f'(x)e^{mx}-f(x)me^{mx}}{e^{2mx}}=\frac{f'(x)-f(x)m}{e^{mx}}\le 0$$

但是 $g(a)=0$ 而显然 $g(x)>0$，而 $g(x)$ 单调不增，那么显然就矛盾了。

【例 1.3】

- 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 上可导，且 $f(0)=f(1)=0, f(\frac{1}{2})=1$，证明：
  - 存在 $\xi \in (\frac{1}{2},1)$，使得 $f(\xi)=\xi$；
  - 对于任意实数 λ 必存在 $\eta \in (0,\xi)$，使得：

$$f'(\eta)-\lambda[f(\eta)-\eta]=1$$

第一问很简单，构造函数 $g(x)=f(x)-x$，那么就是 $g(\frac{1}{2})=-\frac{1}{2}, g(1)=1$，根据零点存在定理得证。

第二问其实用到了第一问的提示，我们可以发现，$g'(x)=[f(x)-x]'=f'(x)-1$，那其实就是证明，存在 η 使得 $g'(\eta)=\lambda g(\eta)$。

故技重施，再构造函数 $h(x)=\frac{g(x)}{e^{\lambda x}}$，那么 $h(0)=0, h(\xi)=0$，根据 Rolle 定理存在 $\eta \in (0,\xi), h'(\eta)=0$。这就是我们要的答案。

> `hint.`
>
> 事实上，单纯的使用中值定理，往往只能得到有限的信息。换一个函数使用中值定理，可以得到全新的结论，获得导数和原函数的更多信息。

【例 1.4】

- 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续 $(a>0)$，在 (a,b) 上可导，$f(a)\neq f(b)$，求证：
  $\exists \xi,\eta \in (a,b), f'(\xi)=\frac{a+b}{2\eta}f'(\eta)$。

盲猜用两次中值定理，然后发现一次柯西一次拉格朗日：

$$\frac{f'(\eta)}{2\eta}=\frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}$$

$$\frac{f'(\eta)(b+a)}{2\eta}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f'(\eta)(b+a)}{2\eta}$$

二、Taylor 公式

Peano 余项:

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+o((x-a)^n)$$

Lagrange 余项:

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}\ (\xi\text{ 介于}x\text{，}a\text{之间})$$

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots$$

$$\sin(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots$$

$$\cos(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots$$

$$(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}x^4+\cdots$$

> 回忆：二项式系数 $\binom{n}{\alpha}$。

> **定理**：设 $f(x)$ 在 x_0 的某个邻域有 $n+2$ 阶导数存在，则它的 $n+1$ 次 Taylor 多项式的导数恰好是 $f'(x)$ 的 n 次 Taylor 多项式。
>
> 应用：$\arctan(x)$ 。

我们还可以对 Taylor 公式进行四则运算以及复合的操作。一个有趣的例子：

【例 2.0】

- 求 $\tan(x)$ 的麦克劳林级数，展开到 x^5。

我们来看一些 Taylor 公式的应用。

【例 2.1】【等价无穷小量到底能不能加减？！？】

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x+\frac{1}{3}x^3-(x-\frac{1}{6}x^3)+o(x^3)}{x^3}=\frac{1}{2}$$

> 所以最保险的方法就是把无穷小量全部写出来，这样还是一个等式。

【例 2.2】

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{e-(1+\frac{1}{x})^x}$$

换个元泰勒展开，没有更简单的方法了（吧）。

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\pi}{2}-\mathrm{arccot}x}{e-(1+x)^{\frac{1}{x}}}$$

设 $g(x)=\mathrm{arccot}x$，开始求导，$g'(x)=-\frac{1}{x^2+1},g'(0)=-1$。

泰勒展开：

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\pi}{2}-(\frac{\pi}{2}-x+o(x))}{e-e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}}$$
$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\pi}{2}-(\frac{\pi}{2}-x+o(x))}{e-e\cdot e^{-\frac{1}{2}x+o(x)}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x+o(x)}{e-e\cdot(1-\frac{1}{2}x+o(x))}$$
$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{x+o(x)}{\frac{e}{2}x+o(x)}=\frac{2}{e}$$

最后一步用了等价无穷小量的性质。显然加上 $o(x)$ 还是和原式等价的无穷小量。

> `hint.`
>
> Taylor 展开其实就是告诉你，如何把一个函数变成等价无穷小量。
>
> 课本中有很多很好的计算题，大家可以全部刷一下。这里就不再补充用 Taylor 公式的极限计算题了。

Taylor 展开还有一些很有趣的应用，不止书上写的那几个。

【例 2.3】【2022 年秋学期第二次小测】

$$f(x)=e^{-x^2},\ f^{(2022)}(0)=\underline{\qquad}。$$

$$f(x)=1+(-x^2)+\frac{1}{2}(-x^2)^2+\cdots+o(x^{2022})=\sum_{i=0}^{1011}\frac{1}{i!}(-x^2)^i$$

对照系数：$-\frac{1}{1011!}x^{2022}=\frac{f^{(2022)}(0)}{2022!}x^{2022},f^{(2022)}(0)=-\frac{2022!}{1011!}$

【例 2.4】【2022 年秋学期第二次小测】

- 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处二阶可导，且有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)+xf(x)}{x^3}=0$$

- 求 $f(0),f'(0),f''(0)$。

直接泰勒展开：

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+x(f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2)+o(x^3)}{x^3}=0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+f(0)+(f'(0)-\frac{1}{2})x^2+(\frac{1}{3}+\frac{f''(0)}{2})x^3+o(x^3)}{x^3}=0$$

$$f(0)=-1,f'(0)=\frac{1}{2},f''(0)=-\frac{2}{3}.$$

> 如果你不知道我现在在讲 Taylor 公式，你还能做得出来嘛？

【例 2.5】

- 设 $f(x)$ 是定义在 $[-1,1]$ 的函数，且 $f'(0)$ 存在，证明：

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}[f(\frac{k}{n^2})-f(0)]=\frac{f'(0)}{2}$$

  直接泰勒展开就有：

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}[f(\frac{k}{n^2})-f(0)]=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}[f'(0)\frac{k}{n^2}+o(\frac{k}{n^2})]$$

$$=\frac{f'(0)}{2}+\lim_{n\to\infty}o(\frac{n+1}{2n})=\frac{f'(0)}{2}$$

> 【Bonus】如果你能不用中值定理和 Taylor 公式，只用导数的定义解决这个题，我请你喝一杯奶茶~

最后让我们来看这次的重头戏。

事实上我们可以发现，Taylor 公式就是拉格朗日中值定理的超级加强版。所以这也提示我们，Taylor 公式是联系函数各阶导数的桥梁。

【例 2.6】

- 设 f 在 $(0,+\infty)$ 上二阶可导，且 $a=\sup\{|f(x)|\},b=\sup\{|f''(x)|\}$，证明：$\sup\{|f'(x)|\}\leq 2\sqrt{ab}$。

经典泰勒展开，直接变形：

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(\xi)}{2}(x-x_0)^2$$

$$f'(x_0)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-\frac{f''(\xi)}{2}(x-x_0)$$

$$|f'(x_0)|\leq\frac{|f(x)|+|f(x_0)|}{|x-x_0|}+\frac{f''(\xi)}{2}|x-x_0|\leq\frac{2a}{|x-x_0|}+\frac{b}{2}|x-x_0|$$

令 $|x-x_0|=2\sqrt{ab}$ 就得证了。

【例 2.7】

- 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，$f(a)=f(b)=0$，证明：

$$\max_{a\leq x\leq b}|f(x)|\leq\frac{1}{8}(b-a)^2\max_{a\leq x\leq b}|f''(x)|$$

对于任意一个 $x_0\in[a,b]$ ，套路化地泰勒展开：

$$0=f(x_0)+f'(x_0)(a-x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi_1)(a-x_0)^2,\xi_1\in[a,x_0]$$

$$0=f(x_0)+f'(x_0)(b-x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi_2)(b-x_0)^2,\xi_2\in[x_0,b]$$

$f'(x_0)$ 不好处理了。我们套路化地取绝对值最大处的 $f(c)$:

$$f(c)=-\frac{1}{2}f''(\xi_1)(a-c)^2,\xi_1\in[a,c]$$

$$f(c)=-\frac{1}{2}f''(\xi_2)(b-c)^2,\xi_2\in[c,b]$$

放缩:

$$|f(c)|\leq\frac{1}{2}\max_{a\leq x\leq b}|f''(x)|\min\{(a-c)^2,(b-c)^2\}\leq\frac{1}{8}(b-a)^2\max_{a\leq x\leq b}|f''(x)|$$

> `hint.`
>
> 在哪个点处展开?代入什么值?然后怎么做?

【例 2.8**】**

- 设 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上有二阶可导且满足 $|f''(x)|\geq\frac{1}{a}$,且 $f(x)$ 在 $(0,a)$ 上存在最大值 M,$f(0)+f(a)=a$,证明 $M\geq\frac{5}{8}a$.

  设 $f(c)=M,f'(c)=0$.

$$f(0)=f(c)+f'(c)(0-c)+\frac{1}{2}f''(\xi_1)c^2$$

$$f(a)=f(c)+f'(c)(a-c)+\frac{1}{2}f''(\xi_2)(a-c)^2$$

$$a=2M+\frac{1}{2}f''(\xi_1)c^2+\frac{1}{2}f''(\xi_2)(a-c)^2$$

$$a>0,f(0)+f(a)>0,\therefore M\geq\max(f(0),f(a))>0$$

$$2M=a-\frac{1}{2}f''(\xi_1)c^2-\frac{1}{2}f''(\xi_2)(a-c)^2$$

(这一步需要观察,发现答案比 $\frac{a}{2}$ 大!)我们需要二阶导是负的。

而因为原函数有最大值,所以二阶导不可能是正的!(这个用极值点存在的定理可以直接证明)。

$$2M\geq a+\frac{1}{2a}[c^2+(a-c)^2]\geq\frac{5}{4}a$$

最后我们以一个很有趣的计算技巧来为这次课程收尾。

【较难】【例 2.9**】**

$$\lim_{x\to0}\frac{(1+\ln(1+x))^{\frac{1}{\tan x}}-e(1-x)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{e^{\frac{1}{\tan x}\ln(1+\ln(1+x))}-e^{1+\ln(1-x)}}{\frac{1}{\tan x}\ln(1+\ln(1+x))-[1+\ln(1-x)]}\frac{\frac{1}{\tan x}\ln(1+\ln(1+x))-[1+\ln(1-x)]}{x^2}$$

考虑 $\frac{1}{\tan x}\ln(1+\ln(1+x)),1+\ln(1-x)$ 的极限,发现都是 1!

那么用拉格朗日中值定理。

$$=e\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+\ln(1+x))-[1+\ln(1-x)]\tan x}{x^2\tan x}$$

$$=e\lim_{x\to0}\frac{x-x^2+\frac{7}{6}x^3-(1-x-\frac{1}{2}x^2)(x+\frac{1}{3}x^3)+o(x^3)}{x^3}$$

$$= e\lim_{x\to 0}\frac{x-x^2+\frac{7}{6}x^3-x-\frac{1}{3}x^3+x^2+\frac{1}{2}x^3+o(x^3)}{x^3}=\frac{4}{3}e$$

后面大家学到定积分以后，还会出现和 Taylor 展开结合的很有趣的题目（套路）。希望大家遇到的时候可以回想起今天讲过的内容（心虚）！

【习题】

- $f:[0,h]\to\mathbb{R}$ 上有一阶连续导数，在 $(0,h)$ 上二阶可导，如果 $f(0)=0$，证明：存在 $\xi\in(0,h)$ 使得

$$\frac{f(h)-hf'(h)}{h^2}=\frac{\xi f'(\xi)-f(\xi)-\xi^2 f''(\xi)}{\xi^2}$$

- 设 $a,b>0$，证明：存在 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$ae^b-be^a=(1-\xi)e^{\xi}(a-b)$$

- 设 $f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{1}{2!}f''(x)h^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x+\theta h)h^n\ (0<\theta<1)$，且 $f^{(n+1)}(x)\neq 0$。求证：

$$\lim_{h\to 0}\theta=\frac{1}{n+1}$$

- 【难】设 $a_1<a_2<\ldots<a_n$ 为 n 个不同的实数，$f(x)$ 在 $[a_1,a_n]$ 上有 n 阶导数，且 $f(a_1)=f(a_2)=\ldots=f(a_n)=0$，证明：对于 $\forall c\in[a_1,a_n],\exists\xi\in(a_1,a_n)$ 使得

$$f(c)=\frac{(c-a_1)(c-a_2)\cdots(c-a_n)}{n!}f^{(n)}(\xi)$$

- $$\lim_{n\to\infty}n^2(\sin\frac{\pi}{n}-\sin\frac{\pi}{n+1})$$