一、数项级数

重要的定理:

如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛，那么 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$。

正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛的充分必要条件是部分和数列有上界。

正项级数的比较判别法:

正项级数的 d'Alembert 判别法:

正项级数的 Cauchy 判别法:

> `hint.`
>
> 既然 d'Alembert 更弱，为什么还要用它?

积分判别法:

设 $f(x)$ 在 $[a, +\infty]$ 上有定义，并且 $f(x) \geq 0$，且其在任意有限区间 $[a, A]$ 上 Riemann 可积，那么取单调递增趋于正无穷的数列 $\{a_n\}, a_1 = a$，设 $u_n = \int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x)\mathrm{d}x$，则反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 具有相同的敛散性。

推论:

如果 $f(x)$ 单调递减，则 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 和 $\sum\limits_{n=[a]+1}^{\infty} f(n)$ 具有相同的敛散性。

【例 1.1】

请判断（如果错误请给出反例）：

- 设 $\{a_n\}$ 是递增有界正数列，下面的级数一定收敛吗?

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1 - \frac{a_n}{a_{n+1}})$$

- 已知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，下面的级数一定收敛吗?

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n a_{n+1}$$

级数的 Cauchy 收敛原理：

Leibniz 级数：

Abel 判别法和 Dirichlet 判别法：

若下列两个条件之一满足，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛：

- $\{a_n\}$ 单调有界，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛。
- $\{a_n\}$ 单调趋于 0，b_n 部分和有界。

> Hint.
>
> A-D 判别法两者本质是一样的，Abel 判别法 b 的条件更强，级数是收敛的，所以要求 a 只需要单调有界，而 Dirichlet 判别法 g 的条件只是部分和有界（可能振荡），所以要求 a 不仅单调还要收敛于 0。

【例 1.2**】**

判断级数的敛散性：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sin(nx)$$

条件收敛和绝对收敛：

- 若 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 绝对收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^+, \sum_{n=1}^{\infty} x_n^-$ 都收敛。
- 若 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 条件收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^+, \sum_{n=1}^{\infty} x_n^-$ 都发散。

【例 1.3**】**

- 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛，下面的级数一定发散吗？

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n$$

> `hint.`
>
> 正负分类可以让你在思绪混乱的时候获得意想不到的结果。

> 更序级数、Riemann 定理了解即可，级数的 Cauchy 乘积后面还会见到。

二、函数项级数（函数列）

> `hint.`
>
> 你觉得这两个东西有本质的区别吗？
>
> 函数项级数其实就是（可能）无法显示表达的函数列。

点态收敛、一致收敛、内闭一致收敛：

推论：若函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 一致收敛，那么 $\{u_n(x)\}$ 一致收敛到 0。

定理：设函数列 $\{S_n(x)\}$ 点态收敛于 $S(x)$，定义 $S_n(x)$ 与 $S(x)$ 的距离为 $d(S_n, S) = \sup\limits_{x} |S_n(x) - S(x)|$，则其一致收敛于 $S(x)$ 的充分必要条件为 $\lim\limits_{n\to\infty} d(S_n, S) = 0.$

定理：设函数列 $\{S_n(x)\}$ 点态收敛于 $S(x)$，则其一致收敛于 $S(x)$ 的充分必要条件为：对于任意数列 $\{x_n\}$，都有 $\lim\limits_{n\to\infty} [S_n(x_n) - S(x_n)] = 0.$

一致连续的 Cauchy 收敛原理和其**逆否命题**：

> `hint.`
>
> 其实就是一个函数列贴向另一个函数，如果永远有一段"翘起来"，那就是非一致收敛。
>
> 上面定理用来证明一致收敛，下面的定理用来证明非一致收敛会更好写点（下面的定理其实没上面的定理那么好用）。

> `hint.`
>
> 函数项级数的非一致收敛判断有什么办法吗？

Weierstrass 判别法：

Abel 判别法和 Dirichlet 判别法：

三个性质（了解即可）：

- **连续性定理（逐项极限）**：

  设 $u_n(x)$ 在 (a,b) 上连续，且其**内闭一致收敛**于和函数 $S(x)$，则和函数 $S(x)$ 也是连续的。

- **逐项微分定理**：

  设 $u_n(x)$ 在 (a,b) 上可微，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 (a,b) 上逐点收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ 在 (a,b) 上内闭一致收敛，则：

  - 和函数在 (a,b) 上可微且 $[\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)]' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$。
  - 和函数内闭一致收敛。

  > 事实上有更强的条件，$u_n(x)$ 不需要在定义域上逐点收敛，只需要在一个点上收敛即可。

- **逐项积分定理**：

  设 $u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上黎曼可积，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛，则和函数在 $[a,b]$ 上黎曼可积且：

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)\mathrm{d}x$$

【例 2.1】

经典例子（小测常考）：

- $S_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}, x \in (0,+\infty)$

- $S_n(x) = (1-x)x^n, x \in [0,1]$

- $u_n(x) = (1-x)x^n, x \in [0,1]$

- $u_n(x) = (-1)^n(1-x)x^n, x \in [0,1]$

- $u_n(x) = nx(1-x^2)^n, x \in [0,1]$

- $u_n(x)=\frac{\sin nx}{n}, x\in(0,2\pi)$
- $S_n(x)=(1+\frac{x}{n})^n, x\in[0,+\infty)$ or $x\in[0,a]$?
- $u_n(x)=\frac{1}{1+n^2x^2}, x\in(0,1]$
- $u_n(x)=xe^{-nx^2}, x\in[0,1]$

【例 2.2】

若函数列 $\{f_n(x)\},\{g_n(x)\}$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛，那么 $\{f_n(x)+g_n(x)\}$、$\{f_n(x)g_n(x)\}$ 是否也是呢？如果 $g_n(x)$ 一致有界呢？

三、幂级数

> 事实上从功利角度去看，这一块考试都是计算相关的。由于时间限制，我就直接上题了。

这一块的一个小考点就是计算幂级数的和函数。这里给出几个**常见和函数模型**：

- $$\sum_{n=0}^{\infty} q^n x^n$$
- $$\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} n x^{n-1}$$
- $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$
- $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

> `hint.`
>
> 难点在于不同模型的组合。
>
> 高中阶段学的各种技巧？

【例 3.1】

求下面幂级数的和函数：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n-1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n(n+1)} x^n$$

【例 3.2】

求下面级数的收敛域：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}(-1)^n(\frac{x}{2x+1})^n$$

四、傅里叶级数

对于周期为 $2T$ 的函数（注意有个 2！），有：

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos\frac{n\pi}{T}x + b_n \sin\frac{n\pi}{T}x)$$

其中：

$$a_n = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)\cos\frac{n\pi x}{T}\mathrm{d}x$$

$$b_n = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)\sin\frac{n\pi x}{T}\mathrm{d}x$$

如果题目要你把 $[0, T]$ 的一个函数展开成正弦/余弦级数，这个的意思就是：把函数的定义域按照奇偶性补到 $[-T, T]$，然后一样地去展开即可。

Riemann 引理小测应该不考（免责申明：具体得看你们老师怎么说），另一个重要的知识点是关于**傅里叶级数收敛性**的（这一块不大会考证明，因为比较难，而且不同班讲的不一样，甚至和课本不一样）。这里放一下贾老师 PPT 的图：

定义（分段可导函数）

设 f 是定义在 $[a, b]$ 上的函数，如果存在 $[a, b]$ 的分割

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b,$$

使得在每个小区间 $[t_{i-1}, t_i]$ 上定义的函数

$$f_i(x) = \begin{cases} f(t_{i-1}+), & x = t_{i-1}, \\ f(x), & x \in (t_{i-1}, t_i), \\ f(t_i-), & x = t_i, \end{cases}$$

都是 $[t_{i-1}, t_i]$ 上的可导函数，则称 f 是分段可导函数。

定理（Dirichlet ）

假设$f(x)$ 以2π 为周期的分段可导函数，则f 的Fourier级数在x_0 收敛到$\frac{1}{2}[f(x_0+)+f(x_0-)]$.

定理（Dirichlet-Jordan ）

假设$f(x)$ 以2π 为周期，且在$[-\pi,\pi]$ 上绝对可积。
又设x_0 是任意一点，如果存在$\delta>0$，使
f 在区间$(x_0-\delta,x_0)$ 和$(x_0,x_0+\delta)$ 上分别单调且有界，
则f 的Fourier级数在x_0 收敛于

$$\frac{1}{2}[f(x_0+)+f(x_0-)].$$

这里就不放简单的计算题了，我们来看看去年的小测题。

【例题 4.1】

设 $f(x)=\begin{cases}x & 0\le x<\frac{1}{2}\\ 5-3x & \frac{1}{2}<x\le 1\end{cases}$,$S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\pi x\ (x\in\mathbb{R})$，其中 $a_n=2\int_0^1 f(x)\cos n\pi x\mathrm{d}x\ (n\in\mathbb{N})$，则 $S(-\frac{9}{2})=$ ______。

【例题 4.2】已知 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的以 2π 为周期的周期函数，且对于 $\forall x\in[0,2\pi]), f(x)=x^2$. 又设 $g(x)=\begin{cases}\frac{\ln(1+x)}{x} & x\in(0,1]\\ 1 & x=0\end{cases}$，则下述命题正确的有：

A. f 的 Fourier 级数在 $\mathbb{R}$ 上处处收敛.

B. $\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{12}$.

C. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=-\frac{\pi^2}{8}$.

D. $f(x)\sim\frac{4\pi^2}{3}+4\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n^2}\cos(nx)-\frac{\pi}{n}\sin(nx))$

> `hint.`
>
> 巴塞尔?

【习题】

- 判断下面级数收敛性：

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$$

$$\sum_{n=3}^{\infty}[e-(1+\frac{1}{n})^n]^p$$

$$S_n(x)=\frac{x}{1+n^2x^2},x\in(0,+\infty)$$

$$u_n(x)=n(x+\frac{1}{n})^n,x\in(-1,1)$$

$$u_n(x)=\frac{x^2}{(1+x^2)^n},x\in(-\infty,+\infty)$$

$$u_n(x)=x^{\alpha}e^{-nx},x\in[0,+\infty),0<\alpha\leq 1$$

$$u_n(x)=x^{\alpha}e^{-nx},x\in[0,+\infty),\alpha>1$$

$$u_n(x)=\sqrt{x}e^{-n^2x},x\in[0,+\infty)$$

- 若 $b_n < a_n$，$\sum_{i=1}^{\infty}a_i,\sum_{i=1}^{\infty}b_i$ 收敛，则 $\sum_{i=1}^{\infty}a_i$ 绝对收敛是 $\sum_{i=1}^{\infty}b_i$ 绝对收敛的______条件。

- 已知 $\sum_{i=1}^{\infty}a_i$ 收敛，若 $a_n>0$，那是否一定 $\exists N>0$ 使得 $\forall n>N,a_n<\frac{1}{n}$？

- 设 $f(x)$ 在定义域 $[0,1]$ 上连续，$f(1)=0$，证明：$x^nf(x)$ 一致收敛到 0。

- 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有连续导函数，定义函数列 $f_n(x)=n(f(x+\frac{1}{n})-f(x))$，证明 $f_n(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上内闭一致收敛。

- 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续，定义函数列 $f_n(x)=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}f(x+\frac{k}{n})$，证明：$f_n(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上内闭一致收敛。