【习题】

- 判断下面级数收敛性：

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$$

使用套路把它化成：

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{e^{\ln n(\ln\ln n)}}$$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{\ln\ln n}}$$

后面这个东西，当 $n>e^e$ 的时候 $\ln\ln n$ 就大于 1 了，所以肯定是收敛的。

$$\sum_{n=3}^{\infty}[e-(1+\frac{1}{n})^n]^p$$

我们转化成极限形式去考虑。

$$e-(1+\frac{1}{n})^n=e^1-e^{n\ln(1+\frac{1}{n})}$$

直观判断：根据拉格朗日中值定理这玩意大概是 $e^{\xi}[1-n\ln(1+\frac{1}{n})]$，最后 ξ 趋向于 1，那么这个无穷小量等价于 $e(1-\frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}})=e\frac{\frac{1}{n}-\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}+o(\frac{1}{n^2})}{\frac{1}{n}}\sim\frac{e}{2n}$。所以这就是一个 p 级数，$p>1$ 收敛，反之发散。

严谨证明：只需要考虑证：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{e-(1+\frac{1}{n})^n}{\frac{1}{n}}=\frac{e}{2}$$

$$S_n(x)=\frac{x}{1+n^2x^2},x\in(0,+\infty)$$

显然 $S(x)=0$，我们考虑证明它是一致收敛的。

$$S_n(x)=\frac{1}{\frac{1}{x}+n^2x}\le\frac{2}{n}$$

所以距离函数的极限显然是 0。

$$u_n(x)=n(x+\frac{1}{n})^n,x\in(-1,1)$$

先看 $u_n(x)$ 是不是一致收敛到 0。$\lim\limits_{n\to\infty}u_n(x)$。相当于是一个 $nq^n(|q|<1)$ 的情况，所以肯定是 0。

但 $\frac{1}{n}$ 好像太小了，我们取 $x_n=1-\frac{1}{n}$，就发现这样 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}n$，肯定不一致收敛了。

$$u_n(x)=\frac{x^2}{(1+x^2)^n},x\in(-\infty,+\infty)$$

先看 $u_n(x)$ 是不是一致收敛到 0。结果发现是对的（可以自己试试看）。

然后想不到任何方法了，咋办？我们试试看利用 Cauchy 逆否命题证明不一致收敛。

取 ε，那么对于任意的 $N>0$，取 $m=2N,n=N+1$，$x=\frac{1}{\sqrt{N}}$，那么用经典极限放缩：

$$\sum_{i=N+1}^{2N}u_i(x)=\sum_{i=N+1}^{2N}\frac{1}{N(1+\frac{1}{N})^i}\geq\sum_{i=N+1}^{2N}\frac{1}{N(1+\frac{1}{N})^N}\geq\sum_{i=N+1}^{2N}\frac{1}{Ne}=\frac{1}{e}$$

取 $\varepsilon=\frac{1}{e}$ 即可证明不一致收敛。

> hint.
>
> 回忆一下 $u_n(x)=(-1)^n\frac{x^2}{(1+x^2)^n},x\in(-\infty,+\infty)$ 怎么做？

$$u_n(x)=x^\alpha e^{-nx},x\in[0,+\infty),0<\alpha\leq1$$

$$u_n(x)=x^\alpha e^{-nx},x\in[0,+\infty),\alpha>1$$

两个题都在书本的 P63。

（我讲课的时候）提到了可以用等比数列求和来算出和函数，进而转化成函数列去判断，不过有点点小麻烦。如果能记住做法（和结论）在小测中还是很有优势的。

$$u_n(x)=\sqrt{x}e^{-n^2x},x\in[0,+\infty)$$

自己编的题目，不能等比数列求和了。

一样的，取 ε，那么对于任意的 $N>0$，取 $m=2N,n=N+1$，$x=\frac{1}{N^2}$，那么用经典极限放缩：

$$\sum_{i=N+1}^{2N}u_i(x)=\sum_{i=N+1}^{2N}\frac{1}{N}e^{-(\frac{i}{N})^2}\geq\sum_{i=N+1}^{2N}\frac{1}{N}e^{-2}=\frac{1}{e^2}$$

取 $\varepsilon=\frac{1}{e^2}$ 即可证明不一致收敛。

- 若 $b_n<a_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n,\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 绝对收敛的______条件。

答案是充要，反直觉吧。去年的考研题拿来当小测题~~，居心叵测啊出题老师！~~

其实这个条件**特别强**，很多反例都是假的。考虑这样一个看起来特别经典的引理：

> **引理**：若 $a_n\leq b_n\leq c_n$，若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n,\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 也收敛。

证明可以用柯西收敛原理，当然也可以移项作差然后使用比较判别法。

那么考虑左推右：

$$0\leq|b_n|=|a_n-b_n-a_n|\leq a_n-b_n+|a_n|$$

那么左右两边都是收敛的，中间当然收敛。右推左也是同理的。

- 已知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，若 $a_n > 0$，那是否一定 $\exists N > 0$ 使得 $\forall n > N, a_n < \frac{1}{n}$?

当时不知道为什么搞错了。其实可以突然比调和级数大一点，然后再变小。比如反例：

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{n}} \ (n = k^4) \\ \frac{1}{n^2} \ \ (n \neq k^4) \end{cases}$$

- 设 $f(x)$ 在定义域 $[0,1]$ 上连续，$f(1) = 0$，证明：$x^n f(x)$ 一致收敛到 0。

课本习题 P61T8，挺经典的分段讨论。首先需要用 cantor 定理知道他是一致连续的，这样就可以按照数轴分段讨论了。

根据定义证明它。对于 $\forall \varepsilon > 0$，下面证明存在 $N > 0$ 满足对 $\forall n > N, x^n f(x) < \varepsilon$。

根据一致连续性，$\exists \delta \in (0,1), |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$。那么对于 $x \in (\delta, 1)$ 有 $|x^n f(x)| < |f(x)| = |f(x) - f(1)| < \varepsilon$ 对任意 n 成立。

对于 $[0, \delta)$ 的额情况，根据极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x^n f(x) = 0 \ (x \in [0,1))$ 知 $\exists N > 0$ 使得 $\forall n > N \Rightarrow |x^n f(x)| < \varepsilon$ 对 $x \in [0, \delta]$。成立。所以这个 N 就是一致收敛里证明需要的，证毕。

> hint.
>
> 可以复习一下黎曼可积的类似的题目，比如这个（我随便挑了一道）：
>
> 设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的连续函数，证明：
>
> $$1.\ \lim_{n\to\infty} \int_0^1 x^n f(x) \mathrm{d}x = 0$$

- 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有连续导函数，定义函数列 $f_n(x) = n(f(x + \frac{1}{n}) - f(x))$，证明 $f_n(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上内闭一致收敛。

特别经典的习题，课本 P61T6，放在这里是为了和下一题对照起来。

~~相信大家都做过，就不写了。~~

- 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续，定义函数列 $f_n(x) = \frac{1}{n} \sum\limits_{k=0}^{n-1} f(x + \frac{k}{n})$，证明：$f_n(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上内闭一致收敛。

这是两年前的期末考卷压轴题，也是我感觉很有意思的题，当然可能是我做的太少。

首先根据定义，$f_n(x)$ 点态收敛于定积分 $\int_x^{x+1} f(x) \mathrm{d}x$，根据定义这是显然的。我们下面证明对于任意闭区间 $[a, b]$ 这是一致收敛的。

然后很 sad 的发现这东西因为是无限个点所以无法放缩...

一个很套路的想法，用关于“距离”的定理，证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \sup |f_n(x) - \int_x^{x+1} f(x) \mathrm{d}x| = 0$ 即可。根据 cantor 定理我们知道它是一致连续的，那么大力放缩。

对于 $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \forall |x_1 - x_2| < \frac{1}{N} \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$。

根据定积分的性质，达布定理，我们知道：

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{k-1}\inf_{[x+\frac{k}{n},x+\frac{k+1}{n}]}\{f(x)\} \le \int_x^{x+1} f(x)\mathrm{d}x \le \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sup_{[x+\frac{k}{n},x+\frac{k+1}{n}]}\{f(x)\}$$

把一致连续的条件代入：

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{k-1}[f(x+\frac{k}{n})-\varepsilon] < \int_x^{x+1} f(x)\mathrm{d}x < \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}[f(x+\frac{k}{n})+\varepsilon]$$

移项，发现正好就是：

$$-\varepsilon < f_n(x) - \int_x^{x+1} f(x)\mathrm{d}x < \varepsilon$$

所以我们只要取这个 N，就证毕了。