Euclid 空间上的极限与连续 多元函数微分学

梅敏炫

2024.5.12

一、 Euclid 空间上的基本定理

1.1 空间点集的概念

回忆一元函数的极限定义:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall x(0 < |\ x - x_0| < \delta), |\ f(x) - A\ | < \varepsilon.$$

而想要把极限推广到更高维的空间, 我们就需要能够刻画空间中两点的接近程度的概念, 这就是度量的作用。

Definition 1 设 S 是一个非空集合，称 $\rho: S\times S\to\mathbb{R}$ 为集合 S 上的一个**度量**，如果它满足:

1. 正定性：$\forall x, y \in S, \rho(x, y) \geqslant 0$，等号成立当且仅当 $x = y$;
2. 对称性：$\forall x, y \in S, \rho(x, y) = \rho(y, x)$;
3. 三角不等式：$\forall x, y, z \in S, \rho(x, y) + \rho(y, z) \geqslant \rho(x, z)$.

并由此得到空间中一点 P_0 的 δ 邻域的定义:

$$U(P_0;\delta) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \rho(x, x_0) < \delta, \delta > 0\},$$
$$U^{\circ}(P_0;\delta) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid 0 < \rho(x, x_0) < \delta, \delta > 0\}.$$

对于一个点集 D，若存在 $M > 0$，使得 $D \subset U(\boldsymbol{O}; M)$，则称 D 为**有界**的，其中 $\boldsymbol{O}$ 为原点。

先前我们首先研究数列的极限，相应地，在高维空间上，我们需要引入与点列相关的概念。

Definition 2 称点集 E 中的一个无穷点列 $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ **收敛**到 P_0，若 $\forall\varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}^+$，当 $n > N$ 时，有 $\rho(P_n, P_0) < \varepsilon$.

Definition 3 称 P_0 为点集 E 的**聚点**，若 $\forall\delta > 0, U^{\circ}(P_0;\delta) \cap E \neq \emptyset$.

聚点实际上描述了这样一件事，就是从 P_0 的任何一个去心邻域中的一个点出发，都可以经由 E 中的一个无穷点列逼近 P_0。也就是说，对于聚点的逼近是可操作的，这也正是我们定义极限所希望实现的目标。

接下来的问题就是，对于一个点集而言，哪些点可能成为它的聚点。

Definition 4 对于非空点集 $D \subset \mathbb{R}^n$ 以及点 $P_0 \in \mathbb{R}^n$,

1. 若 $\exists\delta > 0$ 使得 $U(P_0;\delta) \subset D$，则称 P_0 为 D 的**内点**，点集 D 的所有内点构成的集合称为 D 的**内部**，记作 D°;
2. 若 $\exists\delta > 0$ 使得 $U(P_0;\delta) \cap D = \emptyset$，则称 P_0 为 D 的**外点**;
3. 若 $\forall\delta > 0, U(P_0;\delta) \cap D \neq \emptyset$ 且 $U(P_0;\delta) \cap D^{\mathrm{C}} \neq \emptyset$，则称 P_0 为 D 的**边界点**，点集 D 的所有边界点构成的集合称为 D 的**边界**，记作 ∂D.

Remark 1 内点一定是聚点。

Definition 5 (点集的分类)

1. 若 $D = D^\circ$，则称 D 为**开集**;
2. 若 D 包含了 D 的所有聚点，则称 D 为**闭集**;
3. 若 D 中任意两点 P 和 Q 之间都可以用一条属于 D 的曲线连接，则称 D 为**连通集**.
4. 能够被有限个开集并集覆盖的集合称为**紧集**.
5. 连通的开集称为**开域**.
6. 开域的闭包称为**闭域**.

1.2 Euclid 空间的完备性

因为 Euclid 空间上没有序关系，所以确界定理和单调收敛原理无法推广。

Theorem 1 (Cauchy 收敛准则)

Theorem 2 (闭区域套定理)

Theorem 3 (聚点定理)

Theorem 4 (有限覆盖定理)

二、 多元函数的极限和连续

2.1 多元函数的极限

Definition 6 设 D 是 $\mathbb{R}^n$ 上的开集，$\boldsymbol{x}_0 \in D$，$z = f(\boldsymbol{x})$ 是定义在 $D \setminus \{\boldsymbol{x}_0\}$ 上的 n 元函数，A 为一实数.若对于 $\forall \varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得当 $\boldsymbol{x} \in U^\circ(\boldsymbol{x}_0; \delta)$ 时，成立

$$| \ f(\boldsymbol{x}) - A \ | < \varepsilon,$$

则称 $\boldsymbol{x}$ 趋近于 $\boldsymbol{x}_0$ 时 f 收敛，并称 A 为 f 当 $\boldsymbol{x}$ 趋于 $\boldsymbol{x}_0$ 时的 n **重极限**，记作 $\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0} f(\boldsymbol{x}) = A$.

Remark 2 (多元函数的归结原理) 极限 $\lim\limits_{\substack{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0 \\ \boldsymbol{x} \in D}} f(\boldsymbol{x}) = A \Leftrightarrow$ 对于 D 的任意一个子集 E，若 $\boldsymbol{x}_0$ 为 E 的聚点，必有 $\lim\limits_{\substack{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0 \\ \boldsymbol{x} \in E}} f(\boldsymbol{x}) = A$

所以对于极限不存在的证明方法通常是选取一种逼近方式得到极限不存在，或是选择两种逼近方式，得到的结果并不相同。

2.2 重极限和累次极限

重极限要求的是点列趋近于某一点的过程, 这一过程等价于各分量同时趋近于各自的极限。而我们希望能够将这个同时的极限过程分解为一个个分量的极限过程, 并由此刻画多元函数的极限, 这就是累次极限的概念。下面以二元函数为例, 给出累次极限的定义。

Definition 7 设 D 是 $\mathbb{R}^2$ 上的开集, $(x_0, y_0) \in D$, $z = f(x,y)$ 是定义在 $D \setminus \{(x_0, y_0)\}$ 上的二元函数. 若对于每个固定的 $y \neq y_0$, 极限 $\lim_{x\to x_0} f(x,y)$ 存在, 并且极限

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y)$$

存在, 则称此极限值为 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的先对 x 后对 y 的 **二次极限**.

但是事实上, 累次极限只能表示从坐标系方向上的趋近, 相较于重极限实在是弱的有些多。而它又要求每个分量趋近的时候极限存在, 这一点又非常的强。这就导致累次极限和重极限的存在性没有必然的联系, 甚至于累次极限内部也可能出现某一种顺序的极限存在而其他不存在, 或是存在但是不相等的情况。

不过, 就二元函数的情况来说, 如果能满足上述所说的较强的条件, 还是能建立起二重极限和二次极限的一定关系的。

Theorem 5 若二元函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处存在二重极限

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = A,$$

且当 $x \neq x_0$ 的时候存在极限

$$\lim_{y\to y_0} f(x,y) = \varphi(x),$$

那么 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处的先对 y 后对 x 的二次极限存在并且与二重极限相等.

Remark 3 先对 x 后对 y 的条件同理. 同时这也表明, 如果三者都存在的话必然相等, 此时累次极限求极限的次序可以交换.

Exercise 1 (单选题) 设 $f(x,y)$ 在原点 $\boldsymbol{O}$ 的某邻域内有定义, 则下面命题不正确的是:

A. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y), \lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y), \lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$ 有可能三者恰有两个存在.

B. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y), \lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y), \lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$ 有可能三者恰有一个存在.

C. 若 $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y), \lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$ 都存在, 则它们必然相等.

D. 若 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y), \lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$ 都存在, 则它们必然相等.

2.3 多元函数的连续性 有界闭区域上多元函数的性质

我们在一元函数的时候就了解过, 连续性表明极限符号与函数运算可交换, 多元函数也是一样的道理.

Definition 8 设 D 是 $\mathbb{R}^n$ 上的开集, $z = f(\boldsymbol{x})$ 是定义在 D 上的函数, $\boldsymbol{x}_0 \in D$ 为一定点. 若

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} f(x) = f(\boldsymbol{x}_0),$$

则称函数 f 在点 $\boldsymbol{x}_0$ 处连续.

Theorem 6 (有界性定理)

Theorem 7 (最值定理)

Theorem 8 (一致连续定理)

Theorem 9 (零点存在性定理)

Theorem 10 (介值定理)

三、 多元函数微分学

3.1 偏导数，全微分

显然，我们很希望研究多元函数在所有分量同时变化时的变化率，以此来揭示这一函数的性质。但这样的工作往往是复杂的, 所以我们依然先从一元的方法入手, 先只研究一个自变量变动时函数的对应情况，这也就是所谓**偏导数**。以下均以二元函数作为示例:

Definition 9 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内由定义. 若极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

存在，则称 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处对变量 x 可偏导，此极限为 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处对于变量 x 的**偏导数**，记作 $\frac{\partial f}{\partial x}|_{(x_0,y_0)}$ 或 $f'_x(x_0,y_0)$. $f'_y(x_0,y_0)$ 同理.

Remark 4 $f'_x(x_0,y_0)$ 的几何意义是曲线

$$\begin{cases} z=f(x,y)\\ y=y_0\end{cases}$$

在点 (x_0,y_0,z_0) 处的切线关于 x 轴的斜率，也就有曲线在这一点的切向量为 $\vec{s}_1=(1,0,f'_x(x_0,y_0))$.

获取了与偏导数相关的信息之后, 我们就可以进一步研究函数在所有分量同时变化时的变化率, 这就是**全微分**的概念。

Definition 10 设二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内有定义，若存在常数 A,B, 对充分小的 $\Delta x,\Delta y$, 均有 $f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=A\Delta x+B\Delta y+o\left(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\right)$, 则称 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处**可微**，$A\Delta x+B\Delta y$ 称为 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的**全微分**，记作 $\mathrm{d}z=A\mathrm{d}x+B\mathrm{d}y$.

Remark 5 全微分又被称为线性主部，是因为它其实是对 $(\Delta x, \Delta y)$ 进行线性变换后得到的结果，用于对曲面变化的逼近.

Corollary 11 (全微分与偏导数的关系)

1. 若 $z = f(x, y)$ 在点 P 处可微，则 $f(x, y)$ 在点 P 处可偏导，且 $f'_x(x, y) = A, f'_y(x, y) = B$.
2. 若 $z = f(x, y)$ 的偏导数在点 P 处连续，则 $f(x, y)$ 在点 P 处可微.
3. 函数 $z = f(x, y)$ 在点 P 处可微分的充要条件为

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\Delta z - \left(f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y\right)}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0.$$

3.2 多元复合函数的求导法则

Definition 11 设 $z = f(u, v)$ 为定义在 uv 平面上的 D_{uv} 的二元函数，$u = u(x, y), v = v(x, y)$ 为定义在 xy 平面上的 D_{xy} 的二元函数. 且

$$\left\{(u, v) \,\middle|\, u = u(x, y), v = v(x, y), (x, y) \in D_{xy}\right\} \subset D_{uv}.$$

则称函数 $z = f(u, v) = f(u(x, y), v(x, y))$ 为定义在 D_{xy} 上的**复合函数**. 其中 x, y 为自变量，u, v 为中间变量.

Theorem 12 (链式法则) 设 $z = f(u, v) = f(u(x, y), v(x, y))$ 为如上定义的复合函数，且 u, v 在点 (x_0, y_0) 处可偏导，$f(u, v)$ 在点 (u_0, v_0) 处可微，则 $z = f(u, v)$ 在点 (x_0, y_0) 处可偏导，且有

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Remark 6 回忆一下线性代数的内容的话，你会发现这和基变换的关系是非常相似的.

Theorem 13 (一阶微分的形式不变性)

3.3 高阶偏导数，高阶微分

Definition 12 设 $z = f(x, y)$ 在区域 $D \subset \mathbb{R}^2$ 上有偏导数 f'_x, f'_y，若 f'_x, f'_y 在 D 上也存在偏导数，则称 f'_x, f'_y 的偏导数为 f 的**二阶偏导数**，记作

$$f'_{xx}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right),$$
$$f'_{yx}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right),$$
$$f'_{xy}(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$$
$$f'_{yy}(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

其中 f'_{yx}, f'_{xy} 被称为 f 的**混合偏导数**.

Theorem 14 (混合偏导数相等的条件) 若 $f(x,y)$ 的两个混合偏导数 f'_{xy}, f'_{yx} 在点 (x_0,y_0) 处连续，则

$$f'_{xy}(x_0,y_0)=f'_{yx}(x_0,y_0).$$

Theorem 15 (高阶微分公式) 若 $z=f(x,y)$ 在区域 $D\subset\mathbb{R}^2$ 上 k 阶可微，则

$$\mathrm{d}^k z=\left(\mathrm{d}x\frac{\partial}{\partial x}+\mathrm{d}y\frac{\partial}{\partial y}\right)^k z$$

Exercise 2 (多选题) 设二元函数 $\varphi(u,v)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 的二阶偏导数均存在且连续. 再设 $z=\sin(xy)+\varphi\left(x+y,\frac{x}{y}\right)$，则下述结论正确的有

A.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=y\cos(xy)+\varphi'_1\left(x+y,\frac{x}{y}\right)+\frac{1}{y}\varphi'_2\left(x+y,\frac{x}{y}\right).$$

B.

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}&=\cos(xy)-xy\sin(xy)+\varphi''_{11}\left(x+y,\frac{x}{y}\right)\\&+\left(\frac{1}{y}-\frac{x}{y^2}\right)\varphi''_{12}\left(x+y,\frac{x}{y}\right)-\frac{x}{y^3}\varphi''_{22}\left(x+y,\frac{x}{y}\right).\end{aligned}$$

C.

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}&=\cos(xy)-xy\sin(xy)+\varphi''_{11}\left(x+y,\frac{x}{y}\right)+\left(\frac{1}{y}-\frac{x}{y^2}\right)\varphi''_{12}\left(x+y,\frac{x}{y}\right)\\&-\frac{x}{y^3}\varphi''_{22}\left(x+y,\frac{x}{y}\right)-\frac{1}{y^2}\varphi'_2\left(x+y,\frac{x}{y}\right).\end{aligned}$$

D.

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x\cos(xy)+\varphi'_1\left(x+y,\frac{x}{y}\right)-\frac{x}{y^2}\varphi'_2\left(x+y,\frac{x}{y}\right).$$

3.4 方向导数，梯度

Definition 13 若 $f(x,y,z)$ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 的某邻域 $U(P_0;\delta)\subset\mathbb{R}^3$ 内有定义，$\vec{l}$ 为一确定的方向，以 P_0 为起点，沿 $\vec{l}$ 方向任取一点 $P(x,y,z)\in U(P_0;\delta)$，记 $\rho=|P_0P|$. 若极限

$$\lim_{\rho\to0}\frac{f(x,y,z)-f(x_0,y_0,z_0)}{\rho}$$

存在，则称此极限为函数 $f(x,y,z)$ 在点 P_0 沿方向 $\vec{l}$ 的**方向导数**，记作 $\frac{\partial f}{\partial\vec{l}}|_{P_0}$ 或 $f'_{\vec{l}}(P_0)$.

Remark 7

1. 若 f 在点 P_0 处**可微**，则

$$f'_{\vec{l}}(P_0)=\left(f'_x(P_0),f'_y(P_0),f'_z(P_0)\right)\cdot\frac{\vec{l}}{|\vec{l}|}.$$

2. 函数 f 可以每个方向上的方向导数都存在，但是 f 在点 P_0 处不连续.

Definition 14 设 $f(x,y,z)$ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处可微，则沿方向 $\vec{l}$ 的方向导数 $f'_{\vec{l}}(P_0)\triangleq\nabla f(P_0)\cdot\frac{\vec{l}}{|\vec{l}|}$, 其中 $\nabla f(P_0)=\left(f'_x(P_0),f'_y(P_0),f'_z(P_0)\right)$ 为函数 $f(x,y,z)$ 在点 P_0 处的**梯度**.

3.5 中值定理，Taylor 公式

Definition 15 设区域 $D\subset\mathbb{R}^2$，若对 $\forall P_1(x_1,y_1),P_2(x_2,y_2)\in D,\forall\lambda\in[0,1]$，恒有 $P(\lambda)=(1-\lambda)P_1+\lambda P_2\in D$，则称 D 为**凸域**.

Theorem 16 (中值定理) 设二元函数 $f(x,y)$ 在凸域 $D\subset\mathbb{R}^2$ 上可微，则对于 D 内任意两点 $P_1(x_1,y_1)$ 和 $P_2(x_2,y_2)$，至少存在 $\theta\in(0,1)$，使得

$$f(P_2)-f(P_1)=\nabla f(P)\cdot(x_2-x_1,y_2-y_1),P=\theta P_1+(1-\theta)P_2.$$

Theorem 17 (Taylor 公式) 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域 $U(P_0;\delta)\subset\mathbb{R}^2$ 上有 $k+1$ 阶的连续偏导数，则对于 $U(P_0;\delta)$ 内任意一点 $P(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$，以下式子成立：

$$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)=\sum_{i=0}^{k}\frac{1}{i!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^i f(x_0,y_0)+R_k(\Delta x,\Delta y),$$

其中

$$R_k(\Delta x,\Delta y)=\frac{1}{(k+1)!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{k+1}f(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta\Delta y),0<\theta<1.$$

称为 **Lagrange 余项**.

3.6 无条件极值 条件极值

Definition 16 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域 $U(P_0;\delta)\subset\mathbb{R}^2$ 内有定义，若对 $U(P_0;\delta)$ 内任意一点 $P(x,y)$，有 $f(x,y)\leqslant f(x_0,y_0)$，则称 $f(x,y)$ 在点 P_0 处有**极小值**；若对 $U(P_0;\delta)$ 内任意一点 $P(x,y)$，有 $f(x,y)\geqslant f(x_0,y_0)$，则称 $f(x,y)$ 在点 P_0 处有**极大值**.

Theorem 18 (极值存在的条件)

1. 必要条件：设 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域内可偏导，且在点 P_0 处有极值，则 $\nabla f(P_0)=(0,0)$. 梯度为零的点称为**驻点**或**稳定点**.
2. 充分条件：设 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域内有连续的二阶偏导数，定义矩阵

$$H=\begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{pmatrix},$$

为 f 的 **Hessian 矩阵**
- 若 H 在点 P_0 处正定，则 $f(x,y)$ 在点 P_0 处有极小值；
- 若 H 在点 P_0 处负定，则 $f(x,y)$ 在点 P_0 处有极大值；
- 若 H 在点 P_0 处不定，则 $f(x,y)$ 在点 P_0 处无极值；
- 若 H 在点 P_0 处半正定或半负定，则 $f(x,y)$ 在点 P_0 处可能有极值，也可能无极值.

Remark 8 将 f 在点 P_0 处进行 Taylor 展开至二阶：

$$f(x,y)-f(x_0,y_0)=(\Delta x,\Delta y)\cdot\nabla f(P_0)+\frac{1}{2}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(P_0)+o(\rho^2),$$

事实上，这个式子的二阶项就是 Hessian 矩阵的展开形式.

Example 1 设二元函数 $f(x,y)$ 有连续的二阶偏导数.

1. 若 $P_0(x_0,y_0)$ 为 $f(x,y)$ 的稳定点，f 在 P_0 的 Hessian 矩阵正定，求证：$f(x,y)$ 在 P_0 取极小值.
2. 若 f 在每个点的 Hessian 矩阵都正定，求证：f 至多有一个稳定点.

对于条件极值，我们的方法是通过 **Lagrange 乘数法**将其转化为一个新构造函数的无条件极值问题。

Example 2 证明：二次型 $f(x,y,z)=Ax^2+By^2+Cz^2+2Dxy+2Eyz+2Fzx$ 在单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上的最大值和最小值恰为矩阵 $Q=\begin{pmatrix} A & D & F \\ D & B & E \\ F & E & C \end{pmatrix}$ 的最大特征值和最小特征值.

3.7 隐函数

Definition 17 设 $E\subset\mathbb{R}^2$，函数 $F:E\to\mathbb{R}$. 对于方程 $F(x,y)=0$，若存在集合 $I,J\subset\mathbb{R}$，使得对于 $\forall x\in I$，存在唯一的 $y\in J$ 使得 $(x,y)\in E$，且满足 $F(x,y)=0$，则称方程 $F(x,y)=0$ 确定了一个定义域为 I，值域含于 J 的**隐函数**.

若将此隐函数记作 $y=f(x)$，则对于 $\forall x\in I$，有 $F(x,f(x))=0$.

Theorem 19 (隐函数定理) 若函数 $F(x,y)$ 满足下列条件：

1. 函数 F 在以点 $P_0(x_0,y_0)$ 为内点的某区域 $D\subset\mathbb{R}^2$ 内连续；
2. $F(x_0,y_0)=0$（初始条件）；
3. 在 D 内存在连续的偏导数 $F'_{y(x,y)}$；
4. $F'_{y(x_0,y_0)}\neq 0$；

那么在 D 内由方程 $F(x,y)=0$ 唯一确定隐函数 $y=f(x)$，且 $f(x)$ 在 $U(x_0;\delta)$ 内连续.

若还满足:

5. $F(x,y)$ 在 D 内有连续的偏导数 $F'_{x(x,y)}$;

则 $f(x)$ 在 $U(x_0;\delta)$ 上有连续导数，且有 $f'(x)=-\frac{F'_{x(x,y)}}{F'_{y(x,y)}}$.

Remark 9 这里给出的导数公式只适用于 $F(x,y)$ 这种原始形式，存在复合函数则不适用.

Theorem 20 (向量值隐函数定理) 设函数 $F(x,y,u,v),G(x,y,u,v)$ 在点 $P_0(x_0,y_0,u_0,v_0)$ 的某邻域内满足下列条件:

1. $F(P_0)=G(P_0)=0$（初始条件）;
2. 在该邻域内有连续的偏导数 $F'_x,F'_y,F'_u,F'_v,G'_x,G'_y,G'_u,G'_v$;
3. 在点 P_0 处行列式

$J=\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}F'_u & F'_v\\ G'_u & G'_v\end{vmatrix}\neq 0.$

则方程组

$$\begin{cases}F(x,y,u,v)=0\\ G(x,y,u,v)=0\end{cases}$$

在点 P_0 的某邻域内唯一确定了两个二元函数 $u=u(x,y),v=v(x,y)$，且满足:

1. $U_0=u(x_0,y_0),V_0=v(x_0,y_0)$;
2. $F(x,y,u(x,y),v(x,y))=0,G(x,y,u(x,y),v(x,y))=0$;
3. $u(x,y),v(x,y)$ 有一阶连续偏导数.

Example 3 证明在 $(0,0)$ 的某邻域内存在唯一的可导函数 $y=\varphi(x)$ 满足 $\sin y+\frac{e^y-e^{-y}}{2}=x$，并求其导函数 $\varphi'(x)$.

3.8 几何应用

1. 曲线的切线和法平面：先求出曲线的切向量 $\vec{s}$，再根据点 P_0 确定对应的参数，给出切线和法平面的方程.
2. 曲面的切平面和法线：先求出曲面的法向量 $\vec{n}$，再根据点 P_0 确定对应的参数，给出切平面和法线的方程.
3. 平面方程的确定依靠的是任一向量与法向量的点积为零，直线方程的确定依靠的是直线上的任一向量与方向向量同向或反向.

Exercise 3 (多选题) 下述命题中正确的有:

A. $z=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$ 在点 $(3,4)$ 处沿方向 $\vec{l}=(3,4)$ 的方向导数 $\frac{\partial z}{\partial l}|_{(3,4)}=\frac{1}{5}$.

B. $f(x,y)=x^2y(4-x-y)$ 在由直线 $x+y=6$，x 轴和 y 轴所围成的有界闭区域上的最大值为 4，最小值为 -64.

C. $z=z(x,y)=\int_0^{xy}e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ 满足方程

$$\frac{x}{y}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{y}{x}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-2e^{-x^2y^2}$$

D. 椭球面 $x^2+2y^2+3z^2=6$ 在点 $(1,-1,1)$ 处的切平面方程为 $x-2y+3z=6$.

E. $z=z(x,y)=e^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}$ 满足方程 $x^2\frac{\partial z}{\partial x}-y^2\frac{\partial z}{\partial y}=0$.

四、 习题

Exercise 4 (多选题) 设函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某个邻域内有定义，并且 f在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的所有方向导数都存在，则以下说法错误的是：

A. 偏导数 $\frac{\partial f}{\partial x}(P_0),\frac{\partial f}{\partial y}(P_0)$ 一定都存在.

B. f 一定在点 P_0 处可微.

C. f 一定在点 P_0 处连续.

D. f 在点 P_0 处不一定连续.

Exercise 5 (单选题) 设函数 $f(x,y)$ 在 $U((x_0,y_0);1)$ 上有定义，下面有关 $f(x,y)$ 的四个命题：

(1) $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续；

(2) $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微；

(3) $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处的两个偏导数 $f_1'(x_0,y_0),f_2'(x_0,y_0)$ 存在；

(4) $f(x,y)$ 在 $U((x_0,y_0);1)$ 上每点 (x,y) 处 $f_1'(x,y),f_2'(x,y)$ 都存在，且 $f_1'(x,y),f_2'(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续.

若用 $P\Rightarrow Q$ 表示命题 P 可以推出命题 Q，则有：

A. $(4)\Rightarrow(2)\Rightarrow(3)$.

B. $(4)\Rightarrow(3)\Rightarrow(1)$.

C. $(2)\Rightarrow(3)\Rightarrow(1)$.

D. $(3)\Rightarrow(2)\Rightarrow(1)$.

Exercise 6 (单选题) 设 $f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上有连续的偏导数，且 $f(1,1)=1, f'_{x(1,1)}=1, f'_{y(1,1)}=2$，若 $\varphi(x)=f(x,f(x,x^2))$，则 $\varphi'(1)$ 的值为：

A. 7 B. 3 C. 5 D. 11

Exercise 7 (单选题) 曲线 $\Gamma:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=6\\x+y+z=0\end{cases}$ 在点 $(1,-2,1)$ 处的切线一定平行于：

A. 平面 $x+y+z=0$. B. 坐标平面 YOZ. C. 坐标平面 ZOX. D. 坐标平面 XOY.

Exercise 8 (单选题) 设函数 $f(x,y)$ 在原点 $(0,0)$ 的某个邻域内有定义且在点 $(0,0)$ 处连续，则下述命题正确的是：

A. 若极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在，则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微.

B. 若 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微，则极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{|x|+|y|}$ 存在.

C. 若极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{|x|+|y|}$ 存在，则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微.

D. 若 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微，则极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在.

Exercise 9 (单选题) 二元函数 $u=u(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上可微，且当 $y=x^2$ 时，有 $u(x,y)=1$ 以及 $\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)=x$，则当 $y=x^2$ 时，$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)$ 的值为:

A. $\frac{1}{2}$. B. $-\frac{1}{2}$. C. 0. D. 1.

Exercise 10 (单选题) 设 $f(x,y)=ax^3+bx^2+cy^2+dy^3+2xy$，其中 a,b,c,d 为常数. 则满足什么条件的点 (x_0,y_0) 必不是 $f(x,y)$ 的极值点?

A. $3ax_0+b>0$ 且 $(3ax_0+b)(3dy_0+c)>1$.

B. $(3ax_0+b)(3dy_0+c)=-1$.

C. $3ax_0+b<0$ 且 $(3ax_0+b)(3dy_0+c)>1$.

B. $(3ax_0+b)(3dy_0+c)=1$.