多元微积分

from : hy

一、重积分

1. 面积的定义

$$D\text{可求面积} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists\, T\ s.t.\ \overline{A(D,T)} - \underline{A(D,T)} < \varepsilon \Leftrightarrow A(\partial D) = 0$$

$$A(D) = 0 \Leftrightarrow \exists\text{有限多个矩形}R1, ...Rm,\ D \subset \bigcup_{i=1}^{m} R_i\ \text{ 且 } \sum_{j=1}^{m} A(R_j) < \varepsilon\text{（}Jordan\text{面积）}$$

$$\text{命题：参数曲线满足一个零阶可导，一个一阶可导，则}A(\gamma) = 0$$
$$\text{推论：简单光滑曲线的面积为0}$$

例1： 请举出一个不可求面积的例子

hint:寻找面积上极限和下极限不同的图形

2. 二重积分

2.1 定义

几何定义：用圆柱体拟合
极限定义：Riamann可积定义，可积理论
物理角度的理解

2.2 性质

乘积可积性
保序性
绝对可积性
积分中值定理
……

2.3 计算

2.2.1 长方形

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx$$

2.2.2 X-型区域

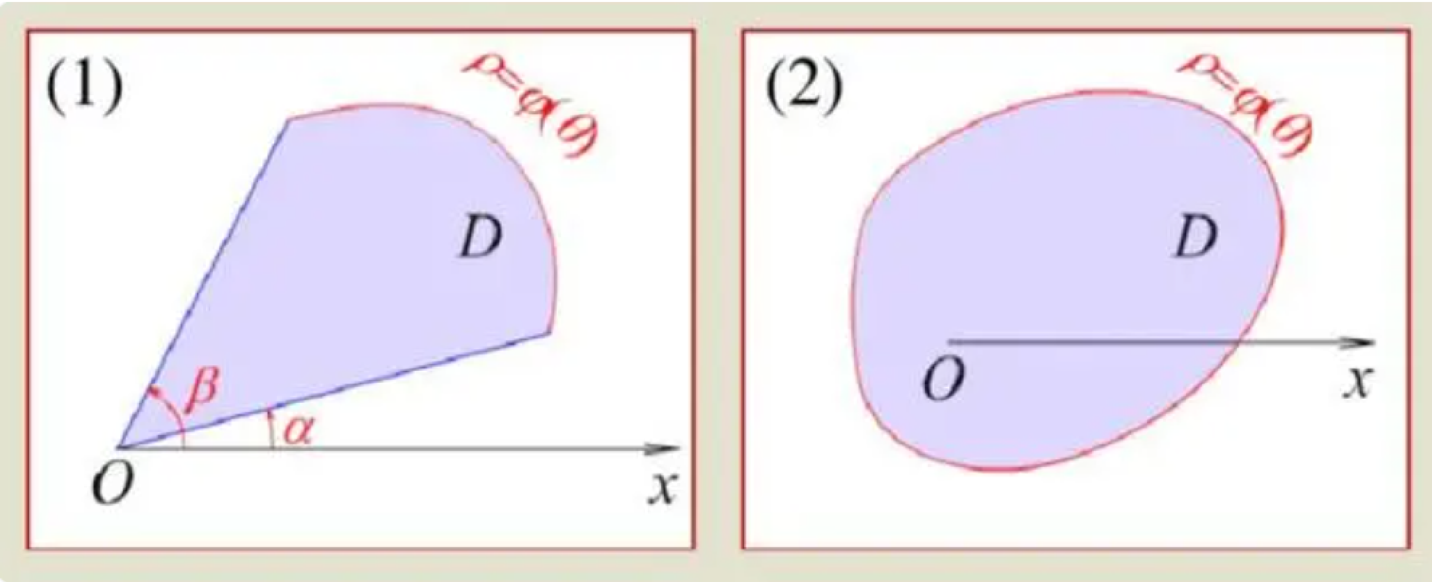
$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy \right)\,dx$$
(结合画图理解)

2.2.2 Y-型区域

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_{x1(y)}^{x2(y)} f(x,y)\,dx \right) dy$$
$$\text{(结合画图理解)}$$

2.2.3 极坐标

例如下面的两种情况：



实质上：变量替换

> 例1：设$f(x)$在$[a,b]$上连续且$\forall x \in [a,b]$，$f(x) > 0$，
> 求证：$\int_a^b f(x)\,dx \cdot \int_a^b \frac{1}{f(x)}\,dx \geq (b-a)^2$

> 例2：计算二重积分$\iint_D \frac{\sin y}{y}\,\mathrm{d}\sigma$，其中$D$由直线$y=x$及抛物线$x=y^2$所围成.
>
> $ans: 1 - sin1$
> $hint$：$X-$型区域积不出来，$Y-$型区域可以

> 例3：求$\int_0^1 \left(\int_x^1 e^{-y^2}\,dy\right)dx$
>
> $ans: \frac{1}{2} - \frac{1}{2e}$
>
> $hint$：综合运用$X-$型区域与$Y-$型区域

> 例4：设$D: x^2+y^2 \leq r^2$，计算极限
>
> $$\lim_{r\to 0^+} \frac{1}{\pi r^2} \iint_D e^{x^2-y^2} \cos(x+y)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$$
>
> $ans: 1$
> $hint$：中值定理的运用

> 例5：求
>
> $$L=\int_a^b \frac{x^b-x^a}{\ln(x)}dx(0<a<b)$$
>
> $hint$：看到特别像积分的函数，化为高次的。

3. 三重积分

3.1 定义

类似二重积分定义
·物理角度理解

3.2 性质

乘积可积性
保序性
绝对可积性
积分中值定理
......

3.3 计算

本质思想：降维。（因为我们已经知道了更低维度的积分方法）

3.3.1 长方体

类似二重积分中的长方形。可化作二重积分。

3.3.2 投影法(先一后二)

以向xoy平面投影为例：

要求：侧面必须是平行于z轴的柱面

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz=\iint_D\left(\int_{z1(x,y)}^{z2(x,y)}f(x,y,z)dz\right)dxdy$$

3.3.3 平面截割法（先二后一）

以用垂直于xoy平面的平面来截割为例

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz=\int_{z_1}^{z_2}\left(\iint_{D_z}f(x,y,z)dxdy\right)dz$$

4. 变量替换

- 极坐标变换

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$
$$(dx,\ dy) = (rdr,\ d\theta)$$

- 柱面坐标变换

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$
$$(dx, dy, dz) = (rdr, d\theta, dz)$$

- 球面坐标变换

$$\begin{cases} x = r\cos\theta\sin\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\phi \end{cases}$$
$$(dx, dy, dz) = (r^2\sin\phi\, dr,\ d\theta,\ d\phi)$$

二、曲线积分

> Q : 为什么会引入曲线积分、曲面积分？

第一类曲线积分

$$\int_\gamma f(x,y)\,ds = \int_a^b f(t,y(t))\sqrt{1+[y'(t)]^2}dt$$

第二类曲线积分

$$\oint_{\gamma+} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \oint_{\gamma+} Pdx + Qdy + Rdz$$

注意：**方向性。**

理解：**物理类比**

计算：

- 有界闭区域边界
- 曲面边界
- 方法：
  - 写参数化
  - 看方向
  - 代入公式

三、曲面积分

第一类曲面积分

$$\iint_S f(x,y,z)\,dS = \iint_D f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\,||\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v||dudv$$

$$\mathbf{r}_u = (\frac{\partial x}{\partial u},\frac{\partial y}{\partial u},\frac{\partial z}{\partial u}),\quad \mathbf{r}_v = (\frac{\partial x}{\partial v},\frac{\partial y}{\partial v},\frac{\partial z}{\partial v})$$

- $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$：切平面法向量
- 物理解释：曲面密度有一个函数，求面的质量。
- 若$z=f(x,y)$?
- 注意：变量替换不要忘了$|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}|$!
- 事实上，第二类都可以由第一类点积法向量推导而来。

第二类曲面积分

引入：单侧曲面、双侧曲面

- 简单光滑曲面S是双侧曲面
- 边界：右手螺旋、诱导定向

$$\iint_{S+}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iint_{S+} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy = \iint_D \mathbf{F}(\mathbf{r}(u,v))\cdot(\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v)dudv$$
$$(\text{闭区域边界：}) = \iiint_K \mathbf{divF}dxdydz = \iiint\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz$$

好用的公式：Wallis公式

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n xdx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^n xdx = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!}, & \text{if n is odd} \\ \frac{(n-1)!!}{n!!}\frac{\pi}{2}, & \text{if n is even} \end{cases}$$

三个公式

Green公式

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_S \nabla\times\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$$
$$\text{在这里，}(C)\text{是一个简单闭合曲线，}(\mathbf{F})\text{是一个二维向量场，}(S)\text{是由曲线}(C)\text{所围成的有向曲面，}$$
$$(\nabla\times\mathbf{F})\text{是向量场}(\mathbf{F})\text{的旋度，}(d\mathbf{S})\text{是曲面}(S)\text{的面积元素。}$$

二重积分 $\Leftrightarrow$ 第二类曲线积分

推论：

- $d(Pdx+Qdy) = \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$

- Newton-Leibniz公式
- 有界闭区域，∂D 为分段光滑$Jordan$曲线，则可计算$A(D)$（三种）

> 例1：设D为两条直线$y=x, y=4x$和两条双曲线$xy=1, xy=4$所围成的区域；
> $F\left(u\right)$是具有连续导数的一元函数，并记$f\left(u\right)=F'\left(u\right)$.
> (1) 证明：$\int_{\partial D}\frac{F(xy)}{y}\mathrm{d}y=\ln 2\int_1^4 f\left(u\right)\mathrm{d}u$；
> (2) 若$F\left(1\right)=2, F\left(4\right)=3$，求曲线积分：$\int_{\partial D}\frac{F(xy)}{y}\mathrm{d}y$.

> 例2：L是曲线$y=\sin x$上从点$(0,0)$到点$(\pi,0)$的一段，求：
>
> $$I=\int_L\sqrt{x^2+y^2}dx+y[xy+\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})]dy$$

Gauss公式

$$\iiint_V (\nabla\cdot\mathbf{F})\,dV=\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$$

三重积分⇔第二类曲面积分

- 散度的定义：

$$\nabla\cdot\mathbf{F}=\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z}$$

> 例：设有界区域Ω由平面$2x+y+2z=2$与三个坐标平面围成，
> Σ为整个表面的外侧；
> 计算曲面积分：
>
> $$I=\iint_\Sigma\left(x^2+1\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-2y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3z\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Stokes公式

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F})\cdot d\mathbf{S}$$

二重积分⇔第二类曲线积分

- 旋度的定义：

$$\nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

注：Stokes' 公式可以看作是 Green's 定理在三维空间中的推广，实质上是三维向量场的**旋度**与**曲线积分**之间的关系，而 Green's 公式则是描述了二维向量场的**散度**与**曲线积分**之间的关系，是Stokes'公式的**二维特例。**

从某种角度来看，这两个公式在本质上是**有联系**的，只是描述的**维度**不同而已。

> 练习：求下列向量场A的旋度
> （1）$\boldsymbol{A} = (2z-3y)\boldsymbol{i} + (3x-z)\boldsymbol{j} + (y-2x)\boldsymbol{k}$
> （2）$\boldsymbol{A} = (z+\sin y)\boldsymbol{i} - (z - x\cos y)\boldsymbol{j}$
> （3）$\boldsymbol{A} = x^2\sin y\boldsymbol{i} + y^2\sin(xz)\boldsymbol{j} + xy\sin(\cos z)\boldsymbol{k}$

【习题】

- 如果二重积分$\iint_D f(x,y)dxdy$的被积函数$f(x,y)=g(x)h(y)$, 积分区域$D=\{(x,y)|a\le x\le b, c\le y\le d\}$, 证明：

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \left[\int_a^b g(x)dx\right]\cdot\left[\int_c^d h(y)dy\right]$$

- 求：

$$I = \int_{1/4}^{1/2} dy \int_{1/2}^{\sqrt{y}} e^{\frac{y}{x}}\, dx + \int_{1/2}^{1} dy \int_{y}^{\sqrt{y}} e^{\frac{y}{x}}\, dx$$

- 求：

$$I = \iint_D |y-x^2| d\sigma$$
$$D = \{(x,y)|-1\le x\le 1, 0\le y\le 2\}$$

- 求：

$$\lim_{R\to\infty} \iint_{[0,R]\times[0,R]} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy$$

- 设函数f在区域$x^2+y^2\le 1$上连续可微，且$f(x,y)=0(x^2+y^2=1)$, 记D_ε是区域$\varepsilon\le x^2+y^2\le 1$，求

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\iint_{D_\varepsilon}\frac{xf_1'(x,y)+yf_2'(x,y)}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

附：部分历年卷中找到的相关题目，可以做做看

四、(32 分) 计算

1. $\iiint_V z^2\sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 V 为 $\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2\le R^2\}$，$R$ 为正常数.

2. $\oint_L (z-y)\mathrm{d}x+(x-z)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z$，其中 L 为曲线 $\begin{cases}x^2+y^2=1\\ x-y+z=2\end{cases}$，方向为 z 轴正方向看为逆时针.

3. $\int_L e^x(1-\sin y)\mathrm{d}x-e^x(1-\cos y)\mathrm{d}y$，其中 L 为 $y=\sin x$ 从 $(0,0)$ 到 $(\pi,0)$ 的一段曲线.

4. $\iint_\Sigma 2xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2yz\mathrm{d}x\mathrm{d}z+(z-2yz-z^2+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 Σ 为上半球面 $x^2+y^2+z^2=1, z\ge 0$, 上侧为正侧.

3.(1)求 $\int_L \frac{e^{2x}\ln(1+e^{2x})}{\sqrt{1+e^{2x}}}\mathrm{d}s$，设$L: y=e^x, x\in[0,1]$

(2)求 $\iiint\limits_V z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，设$V$是$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1$与$z\leqslant 0$的相交区域

(3)求 $\oint_L \frac{(x-y)\mathrm{d}x+(x+4y)\mathrm{d}y}{x^2+4y^2}$，设$L$是$|x|+|y|\leqslant 2$的边界, 并沿逆时针方向

(4)求 $\iint\limits_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，设$S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|x\geqslant 0,y\geqslant 0,z\geqslant 0,x^2+y^2+z^2=1\}$