数学分析Ⅱ(H) 期末 2024春夏讲义

from pcz

总览

数分Ⅱ的学习内容主要是两块：**级数**和**多元函数微积分**

1. **无穷数项级数**的概念无非是数列极限的延申

它在某些方面呈现了和$Riemann$积分意义下的反常无穷积分相似的性质

> 如：一些具体例子的收敛条件，都有**条件收敛**和**绝对收敛**的概念

级数收敛问题中出现了以往没有遇到过的判别方法

> 如：$Cauchy$判别法，$d'Alembert$判别法，引入正部、负部的方法
>
> 深入研究更多的判别法对于分析学理论的学习意义不大，就和不定积分/求原函数一样

2. **函数项级数**和**函数序列**的讨论是平行进行的，注意理清二者的关系

以往我们遇到的具体函数，都是**基本初等函数**，以及它们的**四则运算**、**反函数运算**、**复合运算**所得到的

函数项级数或函数序列给了我们一种**生成新的函数形式**的办法，我们的核心目标是讨论这样新生成的函数的**分析学性质**：极限/连续性，可微性，可积性

> 含参积分其实和函数序列很像，只不过序列以可列的n为参数，而含参积分以连续变化的y为参数

为此，我们才要引入**一致收敛**的概念，为这些分析学定理的条件给出一个清晰的表述

总是这样，只要函数序列或函数项级数在一个一维有界闭区间上的性质足够好，就一定可以进行算子交换次序，但我们往往仅能给出充分条件作为判据，当然是有具体的例子不满足定理条件而能成立定理结论的

3. **幂级数/$Taylor$级数**和**三角级数/$Fourier$级数**是极有研究意义的函数项级数形式

   我们的任务是研究它们的收敛性，以及在这样的特例下，分析学性质能否优化，最后在**收敛域**上用它们表达出我们已经较为熟悉的那些函数形式

> $Weierstrass$第一逼近定理：闭区间$[a,b]$上的任意连续函数都可以用多项式一致逼近(一致收敛)
>
> 设$f\in C[a,b]$，则$\forall\epsilon>0,\exists 多项式函数 P(x), s.t.\ |P(x)-f(x)|<\epsilon,\forall x\in[a,b]$

4. **$\mathbb{R}^n$的结构**

> 关键在于引进范数、距离

> 点集的有界性，开、闭性，连通性，凸性，
>
> 区域：连通的开集，闭区域：区域的闭包，单/复连通区域，二维单/复连通区域

引入**多元函数**和**多维向量值函数**，由此讨论高维情形下**极限**的概念，并给出多元函数**连续性**的概念及其**良好性质**

> 一维有界闭区间$\rightarrow$高维有界闭集/有界闭区域
>
> 注意：$\mathbb{R}^n$中，有界闭集$\Leftrightarrow$紧集（具有有限覆盖性质的集）

5. 多元函数**微分学**

基础内容：

> 可微性，导数（$Jacobi$导数矩阵），偏导数，方向导数，高阶偏导数
>
> 复合函数求导条件与方法（链规则）：树状图 一阶微分形式不变性

复杂一些：

> 隐函数、反函数

> 多元微分在三维空间中的几何应用：
>
> 曲线：切线、法平面
>
> 曲面：切平面、法向量
>
> 曲线、曲面的表达：方程形式与参数形式，特别地，对于直线还有：对称式/点向式

> 微分中值定理，极值问题（无条件极值：$Hessian$矩阵，条件极值：$Lagrange$乘数法）

6. n**重**$Riemann$**积分**与反常积分

> 计算方法：重积分转化为累次积分，变量替换法（换元法/$Jacobi$因子法）

曲线积分、曲面积分

> 高维空间中的低维图形上的积分

有向积分之间的关系

> 降维公式：$Green, Gauss, Stokes$公式

7. **矢量微积分**与**场论**

这部分内容实际上就在**多元微分的几何应用**和**第二类曲线、曲面积分**当中

> $\nabla:\nabla f,\nabla\cdot\vec{A},\nabla\times\vec{A}$

8. **含参变量积分**

> 和函数项级数一样，含参积分函数是又一产生新的函数形式的工具

> $Beta, Gamma$函数

> $Dirichlet$积分：$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$

7和8，考试应该考不到，但很有用

9. 值得一提的是**数列上、下极限**的概念，这个概念本可以在最开始讲数列极限时引入。

> 注意，数列的上极限、下极限在广义实数（$\overline{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$）范围内总存在
>
> 两种等价定义：以上极限为例
>
> - $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}a_n=\inf\limits_{n\in\mathbb{N}}\sup\limits_{k\geq n}\{a_k\}=\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{k\geq n}\{a_k\}$
> - $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}a_n$为数列$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$极限点（某个子列的极限）的最大值

复习题目

来源：2023年期末（图灵回忆卷）

1. > 叙述在集合D上函数列$\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$一致收敛的定义，用定义证明
   > $\left\{f_n(x)=\sqrt{x^2+\frac{1}{n^4}}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ 在$\mathbb{R}$上一致收敛

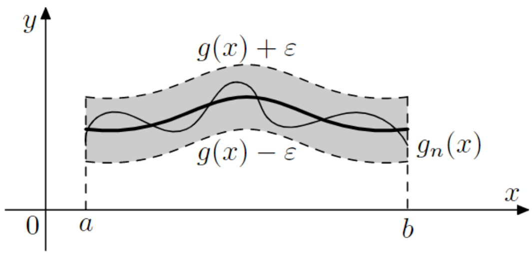
如何判定一致收敛：从定义出发便要先找到**极限函数**，再证明一致收敛

但是如果使用$Cauchy$收敛原理，优级数判别法($Weierstrass$)等，便不用找到极限函数，只需指出收敛性即可

定义 9.1.1 (一致收敛). 如果任给 $\varepsilon>0$, 均存在与 $x\in I$ 无关的正整数 $N=N(\varepsilon)$, 使得当 $n>N$ 时

$$|g_n(x)-g(x)|<\varepsilon,\quad \forall\, x\in I, \tag{$*$}$$

则称函数列 $\{g_n\}$ 在 I 中一致收敛于 g, 记为 $g_n\rightrightarrows g$.



(Cauchy 准则) 定义在 I 中的函数列 $\{g_n\}$ 一致收敛当且仅当对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $N=N(\varepsilon)$, 使得当 $m,n>N$ 时

$$|g_m(x)-g_n(x)|<\varepsilon,\quad \forall\, x\in I.$$

注意, 当 $\{g_n\}$ 满足上式时, 对于每一个固定的 $x_0\in I$, $\{g_n(x_0)\}$ 都是 Cauchy 数列, 因此收敛, 其极限记为 $g(x_0)$. 这样就得到了极限函数 g, 并且 $\{g_n\}$ 一致收敛于 g

(1) (Weierstrass) 如果 $|f_n(x)|\leqslant M_n$, 而正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}M_n$ 收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ 一致收敛. 这是因为

$$|f_{n+1}(x)+\cdots+f_{n+p}(x)|\leqslant M_{n+1}+\cdots+M_{n+p},$$

然后利用 Cauchy 准则即可.

2. > 计算幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+\dfrac{1}{n})x^n$的**收敛域**以及**和函数**

幂级数：计算收敛半径，把两个端点单独拎出来考虑是否收敛

和函数一般是需要我们精心设计出来的，掌握一些最为基本的函数展开很重要

> $Prob$：形如$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^{2n}$的“幂级数”怎么考虑

3. > 证明：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}=\frac{\pi-x}{2},\forall x\in(0,\pi)$

周期延拓一般不需要我们明确地写出来，但是我们需要确保**周期**是能对上的

先观察：等式左边是（周期）奇函数，这意味着，我们要对右边的函数形式做**延拓**，并且也要做奇延拓

> $Prob$：不作延拓能不能作出$Fourier$级数？后果如何？

函数处理好之后，引用$Euler-Fourier$公式，作出$Fourier$级数，用$Dirichlet$定理**说明确实收敛**

> $Bonus$：
>
> 周期函数或者定义在一个有限区间上的函数（总可以作周期延拓），本质是周期的，并且总可以选出关于原点对称的有限区间作为一个周期，做出$Fourier$级数
>
> 问：但是如果需要考虑一个在$\mathbb{R}$上的非周期函数，怎么处理？答：$Fourier$积分！

> $Euler-Fourier$公式：
>
> $f(x):\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$
>
> $a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx,n=0,1,2,\ldots$
>
> $b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx,n=1,2,\ldots$

> $Dirichlet$定理：
>
> 设$\mathbb{R}$上**分段**（在一个周期上分有限段）**光滑**（C^1）的**周期**函数$f(x)$，则$f(x)$的$Fourier$级数**点态收敛**于$\frac{f(x+)+f(x-)}{2}$
>
> 即在$f(x)$的连续点处收敛于函数值本身，间断点处收敛于左右极限的算术平均
>
> $Prob$：有限闭区间的端点处是如何考虑的？

4. > 令$f(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2\ln n}$，证明：
   >
   > - $f(x)\in C[0,\pi]$
   > - $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos nx}{n\ln n}$在$(0,\pi)$上非一致收敛
   > - $f(x)\in D(0,\pi)$，且$f'(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos nx}{n\ln n}$

$A-D$判别法：

定理 10.2.3 设函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)\ (x\in D)$ 满足如下两个条件之一，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ 在 D 上一致收敛.

(1)（**Abel 判别法**） 函数序列 $\{a_n(x)\}$ 对每一固定的 $x\in D$ 关于 n 是单调的，且 $\{a_n(x)\}$ 在 D 上一致有界：

$$|a_n(x)|\leqslant M,\quad x\in D,\quad n\in\mathbf{N}^+;$$

同时，函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ 在 D 上一致收敛.

(2)（**Dirichlet 判别法**） 函数序列 $\{a_n(x)\}$ 对每一固定的 $x\in D$ 关于 n 是单调的，且 $\{a_n(x)\}$ 在 D 上一致收敛于 0；同时，函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ 的部分和序列在 D 上一致有界：

$$\left|\sum_{k=1}^{n} b_k(x)\right|\leqslant M,\quad x\in D,\quad n\in\mathbf{N}^+.$$

连续性定理（无穷级数下求极限）

设$f_n(x)\in C[a,b],\forall n\in\mathbb{N}$，函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$在$[a,b]$上一致收敛，

则：和函数$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$在$[a,b]$上连续，成立：$\lim_{x\to x_0}\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to x_0} f_n(x)$

可积性定理（逐项求积分）

(2) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 中一致收敛于 f. 如果 f_n 均为 *Riemann* 可积函数，则 f 也是 *Riemann* 可积函数，且

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b f_n(x)dx=\int_a^b\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)dx=\int_a^b f(x)dx.$$

可微性定理（逐项求导）

定理 9.2.2. 设 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 中连续可微，且

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 收敛；

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ 一致收敛于 $g(x)$；

则 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 中一致收敛，其和函数可导，且

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)'=\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)=g(x).$$

5. > 设$z=f(x^2e^{-y},xy),f\in C^2(\mathbb{R})$，计算$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

复合函数可求偏导的条件：**内层可偏导，外层可微**

设内层、外层函数都是C^n的，则复合函数也是C^n的

> $Prob$：自变量、中间变量、因变量、函数到底是谁？
>
> 注意：因变量和函数形式往往不在写法上区分，这在一些时候容易造成混淆

6. 证明函数$f(x,y)=\sqrt[3]{x^3+y^3}$在$(0,0)$处沿任意方向的方向导数都存在，但在$(0,0)$处不可微

> $Prob$:
>
> - 多元函数微分学各个术语的概念，有什么重要定理?
> - 方向导数和偏导数的关系如何？要注意你怎样定义这个方向导数的概念

7. 证明在$(0,0)$的某邻域内存在唯一的可导函数$y=\varphi(x)$ 满足方程$\sin y+\dfrac{e^y-e^{-y}}{2}=x$并求其导函数$\varphi'(x)$

定理 12.4.1(一元隐函数存在定理) 若二元函数 $F(x,y)$ 满足条件:

(1) $F(x_0,y_0)=0$;

(2) 在闭矩形 $D=\{(x,y)\mid |x-x_0|\leqslant a, |y-y_0|\leqslant b\}$ 上, $F(x,y)$ 连续, 且具有连续偏导数;

(3) $F_y(x_0,y_0)\neq 0$,

那么

(i) 在点(x_0,y_0)附近可以从函数方程

$$F(x,y)=0$$

惟一确定隐函数

$$y=f(x),\quad x\in O(x_0,\rho),$$

它满足 $F(x,f(x))=0$, 以及 $y_0=f(x_0)$;

(ii) 隐函数 $y=f(x)$ 在 $x\in O(x_0,\rho)$ 上连续;

(iii) 隐函数 $y=f(x)$ 在 $x\in O(x_0,\rho)$ 上具有连续的导数, 且

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}.$$

在具体计算中(当定理的条件满足时), 方程

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n,y)=0$$

所确定的隐函数 $y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的偏导数通常可如下直接计算: 在方程两边对 x_i 求偏导, 利用复合函数求导的链式法则即得

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x_i}=0,$$

于是

$$\frac{\partial y}{\partial x_i}=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}}=-\frac{F_{x_i}}{F_y},\quad i=1,2,\cdots,n.$$

> **非退化性**在隐函数存在性定理中扮演了极为重要的角色，这意味着局部简单的微分线性近似是可逆的

> **逆映射定理**（要求变量数目一致）：
>
> 要求开集上的C^1映射，单点处非退化（$Jacobi\ det\neq 0$），则有该点处局部C^1逆映射
>
> 复合求导，$Jacobi$矩阵导数，结果是单位阵
>
> 例如：$\begin{pmatrix}x_u & x_v\\ y_u & y_v\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_x & u_y\\ v_x & v_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

8. 空间曲线$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=3\\x+2y+3z=0\end{cases}$在点$(1,1,-1)$处的切线与法平面方程

考察**几何应用**

> 二维平面上的曲线可以当成三维的特例，二维平面上无法讨论曲面，因此，我们只讨论三维空间中的曲线、曲面。在三维空间中，讨论几何应用，可以引入**矢量叉积**的有力工具

曲线:

曲线理解成一维图形的形变，占1个自由度

- **参数形式**：含有1个独立参数

  $\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\\z=z(t)\end{cases}$，特别地，取$x$为参数：$\begin{cases}x=x\\y=f(x)\\z=g(x)\end{cases}$

  写成**向量形式**：$\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$，$a\le t\le b$

  > **切向量**：$\vec{\tau}=\vec{r}'(t_0)=(x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0))$，在$t=t_0$处

  > **切线方程**（对称式/点向式）：$\dfrac{x-x_0}{x'(t_0)}=\dfrac{y-y_0}{y'(t_0)}=\dfrac{z-z_0}{z'(t_0)}$，在点$(x_0,y_0,z_0)=(x(t_0),y(t_0),z(t_0))$处
  >
  > 特别地：$\dfrac{x-x_0}{1}=\dfrac{y-f(x_0)}{f'(x_0)}=\dfrac{z-g(x_0)}{g'(x_0)}$,在点$(x_0,y_0,z_0)=(x_0,f(x_0),g(x_0))$处

  > **法平面方程**（点法式）：$\vec{r}'(t_0)\cdot(\vec{r}-\vec{r}_0)=0$
  >
  > 即：$x'(t_0)(x-x_0)+y'(t_0)(y-y_0)+z'(t_0)(z-z_0)=0$

  > $Prob$：切线方程中的某个分母为0，怎么办？这意味着相对应的那个分量随t变动为常数

- **曲面交式/方程解式**：在三维空间中（天然有3个自由度），需要给出2个独立的限制

  $\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$

  > 找出两个平面各自的法向量：$\vec{n}_1=\nabla F$，$\vec{n}_2=\nabla G$
  >
  > 交线位于两个平面上，在某一确定点处，交线的切向量$\vec{\tau}$自然与两曲面的法向量$\vec{n}_1,\vec{n}_2$都垂直
  >
  > 因而**切向量**:
  >
  > $$\vec{\tau}\parallel\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\F'_x&F'_y&F'_z\\G'_x&G'_y&G'_z\end{vmatrix}=(det\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)},det\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)},det\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)})$$

  > $Prob$：请写出**切线方程**、**法平面方程**，方法与之前的完全一样

曲面:

曲面理解成二维图形的形变，占2个自由度

- **方程形式**：在三维空间中（天然有3个自由度），需要给出1个独立的限制

  $F(x,y,z)=0$

  > **法向量**：$\vec{n}=\nabla F=(F'_x(P_0),F'_y(P_0),F'_z(P_0))$，点$P_0=(x_0,y_0,z_0)$

> 来源：任意假设曲面上一个曲线的参数方程，代入求导，可以视为与切向量 $\vec{\tau}$ 点乘得0，即为法向量

> $Prob$：**法线方程、切平面方程**如何写出？
>
> $Hint$：本质是三维空间中在某点处**沿**某个向量的**直线方程**和**垂直**该向量的**平面方程**

> $Prob$：特别地，若$F(x,y,z)=0$可以容易地化为$z=f(x,y)$，该如何处理？
>
> $Hint$：再变回去（

- **参数形式**：含有2个独立参数

  $$\begin{cases} x=x(u,v) \\ y=y(u,v) \\ z=z(u,v) \end{cases}$$

  写成**向量形式**：$\vec{r}(u,v)=x(u,v)\vec{i}+y(u,v)\vec{j}+z(u,v)\vec{k}$

  > **法向量**：
  >
  > 固定v，只让u变动，再固定u，只让v变动，得到两条曲线
  >
  > 局部上，切平面就是被这两条曲线的切向量张成的，两个切向量叉积即得该点处曲面的法向量
  >
  > $$\begin{aligned} \vec{n} &= \vec{r}'_u \times \vec{r}'_v \\ &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} \\ &= (det\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}, det\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}, det\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}) \end{aligned}$$

9. > 求第一类曲线积分$I=\int_\gamma \sqrt{x^2+y^2+z^2}ds$，$\gamma$的参数方程$\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \\ z=e^t \end{cases}, t\in[0,\pi]$

10. > 第二类曲线积分$I=\int_C (e^x-y^3)dx+(\cos y^2+x^3)dy$,其中
    > $C=\{(x,y):x^2+y^2=1, y\geq 0\}$为单位圆的上半圆，方向为逆时针从$(1,0)$到$(-1,0)$

11. > 三重积分$\iiint_\Omega \sqrt[4]{x^2+y^2+z^2}dxdydz$，其中$\Omega=\{(x,y,z):x^2+y^2+z^2\leq 1\}$为单位球

积分关系三大定理

考虑平面 $\mathbb{R}^2$ 上的有界闭域 Ω, 假定其边界由有限条 C^1 曲线组成. $\mathbb{R}^2$ 上的标准定向限制在 Ω 上就得到 Ω 的定向. Ω 的边界 $\partial\Omega$ 有所谓的**诱导定向**. 这个诱导定向定义如下: 设 $(x(t),y(t))$ 为 $\partial\Omega$ 的一段参数曲线, 则 $(x'(t),y'(t))$ 为切向量, $(y'(t),-x'(t))$ 为法向量. 如果 $(y'(t),-x'(t))$ 为相对于区域 Ω 的外法向量, 则参数 t 决定的边界方向称为诱导定向. 直观上看, 从外法向到切向的旋转方向是逆时针的, 这种确定边界定向的方法又称为 "右手法则".

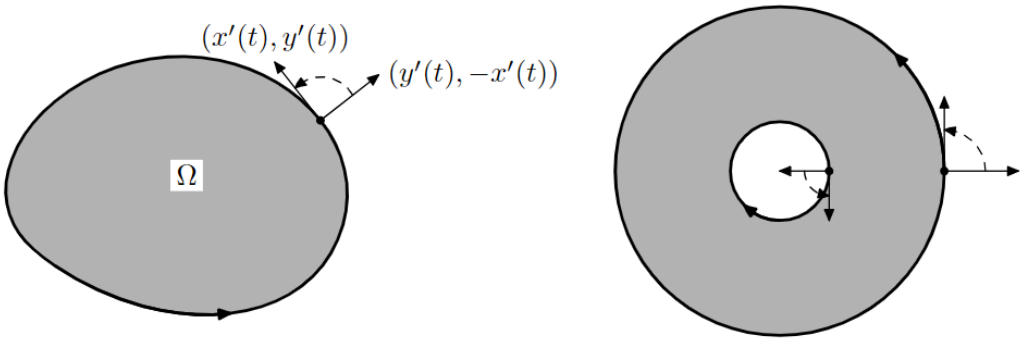


图 14.17 诱导定向

定理 14.5.2 (Green). 设 Ω 为平面有界区域, 其边界由有限条 C^1 曲线组成, 边界的定向为诱导定向. 如果 P, Q 为 Ω 上的连续可微函数, 则

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int_{\partial\Omega} Pdx + Qdy.$$

设 Ω 为 $\mathbb{R}^3$ 中的有界区域, 其边界 $\partial\Omega$ 为 C^1 曲面. 边界定向为诱导定向, 即外侧方向. 与平面上的 Green 公式类似, 下面的 Gauss 公式将三重积分与第二型曲面积分联系起来了.

定理 14.5.3 (Gauss). 设 Ω 为 $\mathbb{R}^3$ 中的有界区域, 其边界由有限个 C^1 曲面组成, 曲面的定向为诱导定向. 如果 P, Q, R 为 Ω 上的连续可微函数, 则

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz = \int_{\partial\Omega} Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy.$$

§14.5.4 Stokes 公式

设 Σ 为 $\mathbb{R}^3$ 中 C^2 的定向曲面, Ω 为 Σ 上的有界区域, 其边界为 C^1 曲线. 我们在边界 $\partial\Omega$ 上用 "右手法则" 定义诱导定向如下: 边界在曲面上的外法向量与边界的切向量的叉乘得到的曲面法向量与曲面的定向给出的法向量同向. 即如果用右手从曲线外法向到切向作旋转, 则大拇指所指方向为定向曲面的法向.

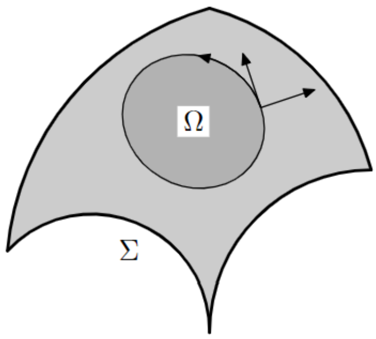


图 14.22 曲面区域

下面的 Stokes 公式将第二型曲面积分与第二型曲线积分联系起来了.

定理 14.5.4 (Stokes). 设 Σ 为定向曲面, Ω 为曲面上的有界区域, 其边界赋以诱导定向. 如果 P, Q, R 为 Ω 上的连续可微函数, 则

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy = \int_{\partial\Omega} Pdx + Qdy + Rdz.$$