$\mathbb{R}^n$的结构与运算

from pcz

认识我们研究的数学对象

- 我们的所有讨论都是基于集合$\mathbb{R}^n$
- 其中的元素$\mathbf{x}$称为点，点是由n个(有限个)实数排成的组$(x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$
- 考虑的是从$\mathbb{R}^n$到$\mathbb{R}^m$的映射$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$
- 特殊地，$m = 1$,f是n元函数
- 明确的数学对象是数和组，一切与图形相关的都是几何意义，可以看作分析理论的应用，不能作为分析理论基础

> 设置这个专题的目的：认识清楚多元函数微积分在数学上的研究对象究竟是谁，它的数学结构是怎样，分析的严谨性是怎样保证的
>
> 初学者往往不关注这些最基本的出发点，以致于对后面的概念总是似懂非懂，逻辑上容易混乱
>
> 往往进行了一段时间的分析/微积分的学习后，我们回过头来再看，才可以对这些概念有清晰的理解

线性运算

加法：采取通常加法

数乘：采取通常数乘

这样$\mathbb{R}^n$自然地成为有限维线性空间

内积、范数、距离运算

定义 1.2.3. 称二元函数 $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ 是一个**内积**，如果它满足

1. (对称) 对任意 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$，$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$；
2. (双线性) 对任意 $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^m$ 以及任意 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$，
$$\langle \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \alpha\langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \beta\langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle;$$
3. (正定) 对任意 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$，$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$；且 $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0$ 当且仅当 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$。

定义 1.2.2. 称函数 $\|\cdot\|:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ 是一个**范数**，如果

1. 对任意 $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^m$，$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|\le\|\mathbf{x}\|+\|\mathbf{y}\|$；
2. 对任意 $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^m$，$\|\mathbf{x}\|\ge 0$；$\|\mathbf{x}\|=0$ 当且仅当 $\mathbf{x}=\mathbf{0}$；
3. 对任意 $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^m$ 和任意 $\lambda\in\mathbb{R}$，$\|\lambda\mathbf{x}\|=|\lambda|\|\mathbf{x}\|$。

> 注意，对于$\mathbb{R}^n$中的点$\mathbf{x}$,可以定义范数$\|\cdot\|$，对于$\mathbb{R}$中的数，可以定义绝对值$|\cdot|$

定义 1.2.1. 称二元函数 $d:\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ 是一个**距离**，如果它满足

1. 对任意 $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^m$，$d(\mathbf{x},\mathbf{y})=d(\mathbf{y},\mathbf{x})\ge 0$；
2. 对任意 $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^m$，$d(\mathbf{x},\mathbf{y})=0$ 当且仅当 $\mathbf{x}=\mathbf{y}$；
3. 对任意 $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}\in\mathbb{R}^m$，$d(\mathbf{x},\mathbf{z})\le d(\mathbf{x},\mathbf{y})+d(\mathbf{y},\mathbf{z})$。

对 $r>0$，记

$$B(\mathbf{x},r):=\{\mathbf{y}\in\mathbb{R}^m|d(\mathbf{x},\mathbf{y})<r\},$$

称为**以 $\mathbf{x}$ 为中心，以 r 为半径的开球**。

称 $\mathbb{R}^m$ 上的距离 d 是**平移不变的**，如果对任意 $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}\in\mathbb{R}^m$，

$$d(\mathbf{x}+\mathbf{z},\mathbf{y}+\mathbf{z})=d(\mathbf{x},\mathbf{y}).$$

> 特别地，我们可以用内积定义一个具体的范数，用范数定义一个平移不变的距离
>
> 最简单的情况下，它们是欧式内积，欧式范数，欧氏距离
>
> 有了这三种运算的$\mathbb{R}^n$称为n维欧氏空间

但在多元函数微积分中，其实，我们完全可以不去考虑内积，而只考虑范数，并用这个范数定义一个平移不变的距离

> 以上这些论述帮助我们更清楚地看见多元函数微积分分析理论的本质

接下来，我们说明$\mathbb{R}^n$上的任何范数彼此等价，这为我们讨论极限时带来了极大的方便

定理 1.2.12. $\mathbb{R}^m$ 上任何范数 $\|\cdot\|$ 都与范数 $\|\cdot\|_\infty$ 等价，即存在正数 $C>1$ 使得对任意 $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^m$，

$$\frac{1}{C}\|\mathbf{x}\|_\infty\le\|\mathbf{x}\|\le C\|\mathbf{x}\|_\infty.$$

因而 $\mathbb{R}^m$ 上所有范数彼此等价。

证明. 记 $\mathbf{e}_k=(0,\dots,1,\dots,0)^T$，即 $\mathbb{R}^m$ 中第 k 个坐标为 1，其他坐标都为 0 的向量。

一方面，记 $C_1=\|\mathbf{e}_1\|+\cdots+\|\mathbf{e}_m\|$。则

$$\|\mathbf{x}\|=\|x_1\mathbf{e}_1+\cdots+x_m\mathbf{e}_m\|\leq|x_1|\|\mathbf{e}_1\|+\cdots+|x_m|\|\mathbf{e}_m\|\leq C_1\|\mathbf{x}\|_\infty.$$

另一方面，假设对任意正整数 n，都存在 $\mathbf{y}_n\in\mathbb{R}^m$ 使得

$$\|\mathbf{y}_n\|_\infty>n\|\mathbf{y}_n\|.$$

则 $\mathbf{y}_n\neq\mathbf{0}$，取 $\mathbf{x}_n=\frac{\mathbf{y}_n}{\|\mathbf{y}_n\|_\infty}$，则 $\|\mathbf{x}_n\|_\infty=1$， $\|\mathbf{x}_n\|<\frac{1}{n}$。

因为 $\|\mathbf{x}_n\|_\infty=1$，所以根据定理**1.2.11**知存在子列 $\mathbf{x}_{n_k}$ (在 $\|\cdot\|_\infty$ 下)收敛，极限为 $\mathbf{x}_0$。因此

$$\|\mathbf{x}_0\|\leq\|\mathbf{x}_{n_k}\|+\|\mathbf{x}_{n_k}-\mathbf{x}_0\|\leq\frac{1}{n_k}+C_1\|\mathbf{x}_{n_k}-\mathbf{x}_0\|_\infty\to 0,\quad k\to+\infty.$$

从而 $\mathbf{x}_0=\mathbf{0}$。然而

$$1=\|\mathbf{x}_n\|_\infty\leq\|\mathbf{x}_0\|_\infty+\|\mathbf{x}_0-\mathbf{x}_{n_k}\|_\infty=\|\mathbf{x}_0-\mathbf{x}_{n_k}\|_\infty\to 0,\quad k\to+\infty.$$

矛盾。所以存在正整数 N 使得对任意 $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^m$， $\|\mathbf{x}\|_\infty\leq N\|\mathbf{x}\|$。取 $C=C_1+N$，则对任意 $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^m$，

$$\frac{1}{C}\|\mathbf{x}\|_\infty\leq\|\mathbf{x}\|\leq C\|\mathbf{x}\|_\infty.$$

$\square$

> 有了距离，可以定义$\mathbb{R}^n$中点的邻域的概念，引进集合（$\mathbb{R}^n$中的子集)的开、闭等等性质
>
> 也是有了距离，才可以定义$\mathbb{R}^n$中极限的定义，而函数连续性等的定义正是依赖于极限