数学分析 I (H)2024秋冬讲义：实数系与收敛

from pcz,physics

WeChat：Z19550108511

Email：panchengzhe@zju.edu.cn

What Is Mathematical Analysis?

> 数学分析(H)$\neq$数学分析
>
> 数学分析(H)$\approx$微积分+

数学分析这门课程的研究对象：实数和（一元）实值函数

我们的目标是建立其上关于**极限和微积分的运算**与**公理化体系**

微积分是为了解决计算问题，分析的语言是追求公理化

一些仅基于所研究的数集的基本性质得出的不等式是数分许多**操作性**证明中很有用的trick

参考书目

> 教材（习题例题）陈纪修/华师大
>
> 数学分析 梅加强，微积分 wxf
>
> 李逸 基本分析讲义
>
> 于品 数学分析讲义
>
> 卓里奇，Rudin，Stein
>
> 陶哲轩 实分析
>
> 吉米多维奇习题集

数学学习中应该做好的地方

> 1. 抄书、记笔记：注意概念出现的先后顺序，有逻辑地梳理它们
> 2. 看懂并理解分析学语言的写法，刻意地学习一些典型的证明方法，会用分析语言写出一些命题的证明
> 3. 不仅要学习分析语言，还要把它"翻译成人话"
> 4. 必要的练习与做题
> 5. 定理的成立需要条件，我们的每一步操作都得有理由，所以请在日常解题时想清楚每一步骤是为什么
> 6. 初学者一般对计算操作掌握得较快，一般的应用时，简单地上手计算没有问题，但遇到挑剔的条件，就要小心了（小测时总有一些题目或选项需要我们对偏分析的东西有一个好的理解和辨析）
> 7. 不同教材中概念的定义和记号会有不同，但这不影响数学
> 8. 有的教材和解答确实是错的，我们需要辨别，包括辅学讲义（
> 9. 我很赞成用现代化和公理化的语言来进行教学

我们从哪里开始?

数学上，我们的每一步操作或推导都是基于**逻辑**的

> 定义definition、公理axiom、定理theorem、命题proposition
>
> 定义指出了一个术语和它对应的概念，实际上是指定了一个充分必要条件“⇔”
>
> 公理是我们处理问题设定的，是非逻辑的
>
> 定理是由先前公理、定理依逻辑推导出的结果
>
> 一般来说我们见到的命题都是真命题，只是不太被称为定理，所以写成命题

> 逻辑用语：任意∀，存在∃
>
> 如何理解"任意给定"?

现代数学语言的基础：**集合set**和**映射map**

如何看待完美主义

我们用不严格的说法定义（通俗定义）什么是元素、什么是元素相等、什么是集合，什么是映射，什么是自然数、整数、有理数、甚至实数，剩下所有的事情都可以建立严格的理论体系，尽管一些细节非数学工作者不必要掌握

> 数理逻辑、集合论

我们不用去掌握最基本的公理体系结构如何！实际上，我们一般是在**ZFC**的体系下研究问题的。

最最基本的这些通俗定义，即使是数学家也不必要完全搞清楚，因为这些东西被专门的研究者公理化地建立起来，我们只是使用这些概念并不影响后续操作的严格性

> 数分课程中，可能最困扰你的概念是微分：dx
>
> 为了降低初学者的学习难度，现阶段我们暂时只是直观地认为它是Δx在很小时的标记，但细心的同学会发现这个说法很站不住脚
>
> 其实微分是微分形式form：它意味着一个微分映射场

集合

> 集合：一些不会带来歧义的元素（元）的全体
>
> $A=\{a,b,c,d,...\},\ B=\{b\mid p(b)\}$

- 集合和元素的比较关系：属于、含于、子集、空集、单点集、基本集
- 集合的运算（一元、二元）：交、并、补、差、Descartes积（有了笛卡尔积，多元映射都是映射）、对称差Δ，De Morgan律（对偶方法）
- 集类、集族是指?
- 线性空间$V=(V,\mathbb{F},+,\lambda a)$、群、环、域都是带有运算的集合

映射

> 映射：从集合A到集合B（有方向）的一个对应关系f，它把A中任何一个元素唯一地指定到B中的某个元素上
>
> $f: A \to B, a \mapsto b = f(a)$

- 恒等映射（最简单的映射）
- 映射的单性（1-1）、满性（onto）、双射、逆、复合、限制、延拓

  > 最简单的零延拓因为过于自然，有时没有明确写出

- 映射的像、原象、像集、原像集

> 映射可逆、映射的逆（逆映射、反函数）的概念依赖于先前定义的恒等映射
>
> 逆映射的唯一性？
>
> 一般的证明唯一性的办法？（直接证明、反证法）

> 映射或函数的意义与记号的混淆是一件很糟糕的事情，例如：$y = y(x)$

初学者很可能意识不到这一点，而当你在后续微分、积分理论中遇到让你搞迷糊的概念时，回过头来再想着一点，你会得到更深刻的理解

如何判断我们对数学上的概念是否理解正确？一个办法是指出"相等"意味着什么（怎么定义，怎么判断）

> Prob：什么是两集合相等，什么是两映射相等？

指标集 $\Lambda : A_\lambda,\ \lambda \in \Lambda$

> 写法A_λ实质上是一个指标集Λ到某一集类的映射
>
> Prob：指标集必须是数集吗？

重新认识：数

引进自然数、整数、有理数

- 稠密性、阿基米德性、有序性（可以比较大小）

> 阿基米德性：$\forall\ 0<a<b,\ \exists\ n\in\mathbb{N},\ s.t.\ na>b$

- 集合的势（基数）：有限、可列、不可列、无限、至多可列

> def：有限集和可列集统称为至多可列的
>
> prop：可列个可列集之并仍是可列集

我们今后会更关注**无限**的事情

界 最值 确界

数集：有界性、最大值（最小值）、上界集（下界集）、上确界（下确界）

请注意有时我在下边没有指出出现的数属于哪个集合，而强调可以比较大小是因为复数没有“序”

有界性

> 设S是一个数集(或是赋范空间)
>
> 称S是有界的，若$\exists\ M>0, s.t.\ |a|\le M,\ \forall\ a\in S$

最值

> 设S是一个可以比较元素大小的非空数集
>
> 若$\exists\ M\in S, s.t.\ a\le M,\ \forall\ a\in S$，则称$M$是$S$的最大值，记作$\max S$

上界与上界集

> 设T是一个可以比较元素大小的非空数集，$S\subset T$
>
> $U_T(S)\overset{def}{=}\{M\in T|a\le M,\forall a\in S\}$称为$S$在$T$中的上界集，$U$中的元素称为$T$的一个上界

上确界

> 设S是一个可以比较元素大小的非空数集，若
>
> - $\exists\ M, s.t.\ a\le M,\ \forall\ a\in S$
> - $\forall\ \epsilon>0,\ \exists\ b\in S,\ s.t.\ M-\epsilon<b$
>
> 则称M是S的上确界，记作$\sup S$

> **Exercise**
>
> - 请写出$\min S$、$\inf S$的定义，这是基本功
> - 证明：$\sup S$存在$\Leftrightarrow\min U_T(S)$存在，且此时$\sup S=\min U_T(S)$

根据定义，可以看到：

- 对于元素可以比较大小的有限数集，必有max、min
- 对于元素可以比较大小的无限数集，未必有max、min
- 若存在最大值，则必存在上确界，且上确界等于最大值
- 反过来：若存在上确界且$\sup S \in S$，则存在最大值且最大值等于上确界
- 若存在上确界和下确界，则必定有界
- 而反过来呢？下面回答确界存在的问题（有一种集合必有最值：实数子集的上界集必有最小值）

实数，千呼万唤始出来：$\mathbb{R}$

不要认为中学学过实数我们就已经很好地定义了实数

> 思考：无限小数究竟被定义了么？

实数的构造：Dedekind分割 $\longrightarrow$实数连续统（连续统势，在得到闭区间套定理后立马可证$\mathbb{R}$不可列）

> $\mathbb{R}$在代数上有域的性质，在分析上是连续统
>
> 作为$\mathbb{R}^n$中最特殊的情况，居然还是带内积的有限维向量空间（Euclid空间）！

复数其实是由实数出发构造的数偶，不过数分不涉及它（

由Dedekind分割构造出来的实数，成立**实数系基本定理**：

> 确界存在性定理：非空有界实数(子)集必有(实数)确界

我们的研究对象：定义在$\mathbb{R}$上的函数

函数：数集或其子集上的映射

函数的有界性、奇偶性、周期性，实值函数的（严格）单调性

函数的表示方法：显式、隐式、参数、分段表示

> 不要为一些定义和概念增加它不具有的事情

我们中学时往往把函数理解为显式表示出来的算式

比如初等函数：基本初等函数的四则运算、复合运算、求逆运算

其他的例子：符号函数sgn、取整函数[ ]、Dirichlet函数D、Riemann函数R

> $$D(x) \overset{def}{=} \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Q} \\ 1 & x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \end{cases}$$
>
> 它给出了关于函数性质的许多例子：无最小正周期的周期函数、任意点极限不存在（点点不连续）的简单函数，L可积但是R不可积的函数

> 思考：基本初等函数如何定义，更确切地说是如何定义其在无理点上的取值？有理数的稠密性！

> 是否可以理解：函数图像只是具有辅助的几何意义，没有可靠（严格）的数学基础

收敛与极限

分析中的问题几乎都是收敛的问题，我们以后会遇到很多不同类型收敛的定义

数列极限和**函数极限**:它们定义的基础是$\epsilon - N$语言和$\epsilon - \delta$语言

> 可能是一些教师认为可列比连续统势更简单，所以先介绍数列极限，实际上这个顺序颠倒的话问题也不大，只是在如Heine归结原理、闭区间套定理的地方需要小心一些

求导本质是固定每一点研究差商的**函数极限**，据此来定义一个函数：导函数，所以它的本质还是$\epsilon - \delta$语言

R积分是定义了一类新的极限概念，是**基于分割与分割模的“$\epsilon - \delta$”语言**

> 思考：
>
> $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f(n)$是否一定成立？在什么条件下会成立？（可以考虑$f$有我们需要的单调性）
>
> 具体精细的证明是严格按照定义：用$\epsilon - N$语言和$\epsilon - \delta$语言反复书写，但有时我们默认了这些的成立
>
> 这样便可以回答为什么$\lim\limits_{x \to +\infty} (1 + \dfrac{1}{x})^x = \lim\limits_{n \to \infty} (1 + \dfrac{1}{n})^n \overset{def}{=} e$

有限与无限

> 对于有限集和它上的映射，其中所有的事情都可以列举出来，其实就已经把有限的东西完全搞清楚了
>
> 因此有限集不是我们收敛、极限所研究的对象，这就是为什么我们在数列敛散性中总是默认无限数列

数列和子列的定义

数列$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

> 数列是一个从自然数$\mathbb{N}$到某一数集的映射$n \mapsto a_n$
>
> 一般地，我们用这个映射随自然数增大依次的取值来标记一个数列$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$
>
> 我们一般研究的都是这个映射的取值，也就是a_n
>
> 由于脚标n的写法，数列是可列的，其中元素是带编号的（按顺序排列）

一个数列$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$的子列$\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$

> 取一个在自然数$\mathbb{N}$上取值的严格单调增加的指标数列$\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$
>
> 把数列$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$里脚标为n_k的元取出，并排列成：$a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots, a_{n_k}, \ldots$得到一个新的数列$\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$
>
> 把得到的数列$\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$称为数列$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$的子列

> 理解：子列$\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$本质是映射$k \mapsto a_{n_k}$,它可看作指标数列$\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$与数列$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$的**复合**
>
> 请注意：子列$\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$的脚标是$k$，而$n_k$是联系子列在原数列上取值的“中介”

> Prob：梳理子列收敛性和母数列收敛性的关系

数列收敛与极限的定义

数列收敛

> Cauchy给出了极限，Weierstrass给出了$\epsilon - N$语言和$\epsilon - \delta$语言

> 设实数列$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$
>
> 若$\exists A \in \mathbb{R}$，$\forall \epsilon > 0$，$\exists N \in \mathbb{N}$，$s.t.\ |a_n - A| < \epsilon$，$\forall n > N$
>
> 则称该实数列收敛，A称为该实数列的极限
>
> 也称实数列$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$收敛于A，记作$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$

> 若$A = 0$，则称数列$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$为无穷小量

邻域语言

> $|a_n-A|<\epsilon \Leftrightarrow a_n\in O(A,\epsilon)$
>
> O有时也记为U或B，且注意，邻域对于a_n, A是对称的
>
> 有两类邻域：自变量的邻域和因变量的邻域！

数列发散

> 称数列发散，若该数列不收敛

“实”可改为“复”，$\mathbb{R}$改为$\mathbb{C}$

一般，ϵ在实数中取值，但由于有理数集$\mathbb{Q}$的稠密性，也可在有理数中取值

> 注：无理数集$\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$也具有稠密性

无穷大

> 设实数列$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$
>
> 若$\forall M>0$，$\exists N\in\mathbb{N}$，$s.t.\ a_n>M$，$\forall n>N$
>
> 则称该实数列是**正无穷大量**，记作$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$

> 若实数列的相反数列为正无穷大量，则称该实数列是**负无穷大量**

> 若$\forall M>0$，$\exists N\in\mathbb{N}$，$s.t.\ |a_n|>M$，$\forall n>N$
>
> 则称该实数列是**无穷大量**，记作$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$

> 有时∞表示$+\infty$，请根据上下文理解清楚符号表示的含义

> 思考：两数列是否有等价无穷小（大）、高阶/低阶无穷小（大）的概念？
>
> 答：当然可以！和函数中的讨论想必，无非是$\epsilon-N$语言和$\epsilon-\delta$语言的差别

> **思考：**
>
> 请关于收敛与否和极限是否存在进行分类讨论

粗略地讲，可分为：收敛到有限值，无穷型发散，摆动型发散

> 如果考虑广义实数$\overline{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$和广义收敛（把正/负无穷大看作收敛而非发散）的概念，讨论该如何进行？

我们给出一个必定收敛的例子，考察你对基本的分析语言的掌握程度：

> 对一个数列$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，可给出上极限、下极限的定义，在广义实数（$\overline{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$）范围内数列的上、下极限总存在

> 两种等价定义：以上极限为例
>
> - $\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n \overset{def}{=} \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq n}\{a_k\} = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n}\{a_k\}$
> - $\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n$为数列$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$极限点（某个子列的极限）的最大值

- 请体会**"任意给定"**在**多指标**运算中发挥的意义
- 如果你有兴趣，可以去了解**一列集合（集列）的上下极限**的概念
- 谨记，上下极限$\overline{\lim_{n\to\infty}}$只是记号，真正的含义要看如何定义！

实数系基本(连续性)定理

在**实数范围内**（即取基本集$X=\mathbb{R}$）有如下定理：

> **1.确界存在定理(确界原理)**
>
> 非空有上界实数集必有上确界

> **2.单调有界收敛定理**
>
> 单调递增的有界数列必定收敛，且极限值是其作为数集的上确界

数列单调性与严格单调性：

数列有界：

> **3.闭区间套定理**
>
> 设闭区间套$\{[a_n,b_n]\}_{n\in\mathbb{N}}$，则存在唯一实数$\xi\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}}[a_n,b_n]$，且$\xi=\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n$

注意：定理结论的前半句话即：$\bigcap_{n\in\mathbb{N}}[a_n,b_n]=\{\xi\}$

> **闭区间套：**
>
> 设$\{[a_n,b_n]\}_{n\in\mathbb{N}}$是一列闭区间，且
>
> - $[a_{n+1},b_{n+1}]\subset[a_n,b_n]$，$\forall n\in\mathbb{N}$
> - $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$
>
> 则称这列闭区间$\{[a_n,b_n]\}_{n\in\mathbb{N}}$是闭区间套

> **4.(Bolzano-Weierstrass)致密性/列紧性定理**
>
> 有界数列必有收敛子列

> **5.(Weierstrass)聚点原理**
>
> 有界的无限实数集必有聚点（极限点）

> **聚点：**
>
> 设数集E，若$\exists \xi, s.t. \forall \epsilon > 0, \exists$无穷多个$E$中元素$x \in O(\xi, \epsilon)$，则称$\xi$是$E$的一个聚点，也称为$E$的极限点

> 思考：能不能把聚点定义中的"无穷多个"去掉？增添一个细微的限制就可以！
>
> Hint：考虑写为$(O(\xi, \epsilon) \backslash \{\xi\}) \bigcap E \neq \emptyset$

> **6.实数列完备性定理（Cauchy收敛原理）**
>
> 实数收敛列等价于实数基本列

> 基本列（也称为Cauchy列）：
>
> 设数列$\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$满足：$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, s.t. |x_n - x_m| < \epsilon, \forall n, m > N$，则称$\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$是一个基本列

> 距离（度量）空间具有完备性是指：基本列必定（封闭地）收敛于空间中的某一元

> **7.(Heine-Borel)有限覆盖定理**
>
> $\mathbb{R}$上的闭区间$[a, b]$具有紧性

> Exercise：请用集合语言写出什么是区间

紧集：

> 一个集合是**紧集**（具有**紧性**），是指它的**任意开覆盖中必存在有限子覆盖**

覆盖：

> 设一个集合E和一族集合$\{G_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$，若$E \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$，则称集族$\{G_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$是集合$E$的一个**覆盖**
>
> 若指标集Λ是有限集，即E含于有限个集合之并，则称为**有限覆盖**
>
> 若集族中每个元G_λ都是开区间（更一般地：开集），则称为**开覆盖**
>
> **子覆盖**就是通常所说的子集(族)

> 更一般的表述为：$\mathbb{R}^n$或有限维赋范线性空间中：紧集⇔有界闭集

> Prob：7大定理间的**逻辑关系**是怎样？它们和Dedekind分割在逻辑地位上的关系又如何？

数列极限的性质、定理、方法与应用

掌握这些基本性质的证明和应用！因为这些性质很基本，所以应考虑由定义出发推导它们！

这些证明思路和方法以后（比如分析学中对函数各类概念的讨论）会经常用到，它对你理解实数的性质和分析语言都有很大的帮助！

得到这些性质之后，你会发现以后极限的记号$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$在形式上会很有用，但要记住，这也只是形式！

> 1.极限的唯一性

> 2.收敛的有界性

> 3.两数列收敛的保序性

> 4.两数列收敛的保号性

注意3与4的**逆否关系**

> 5.三数列的夹逼性（迫敛性）

> 6.数列收敛与其极限的（有限次）四则运算性质

立即要问，什么叫做数列/函数/映射的线性（加法、数乘）运算、四则运算？（尽管这很自然以至于总是不被注意，但这需要定义）

理解**有限次操作**和**无限次操作**的分别

用**线性代数的语言**来说："求在某一点处的极限"是一个线性映射（作用），"求极限"是一个线性映射场

> 7.数列收敛与前有限项无关

Stolz定理

> 设$\{y_n\}$是**严格单调增加**的**正无穷大量**，且$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = a$，其中$a \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$
>
> 则数列$\{\dfrac{x_n}{y_n}\}$极限存在，且$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n} = a$

可以理解为数列的L'Hospital法则

分子有理化

> 处理含根号问题

压缩映射（映像）原理

> 可在课外自行查阅了解，这个方法的使用非常丰富

应用

> 用极限来定义π和e
>
> 而证明它们是无理数则是后话了