数学分析 I (H)2024秋冬反馈

from pcz,physics
WeChat：Z19550108511
Email：panchengzhe@zju.edu.cn

1.关于集合的补充

若某一集合X中的元素都是集合，常称X是一个集族或集类

可见集族（集类）只不过是特殊的集合

> 重要的例子：设A是一个集合，A的子集全体构成的集合称为A幂集，记为2^A或$\mathcal{P}(A)$

2.

> **Exercise**
>
> - 证明：$\sup S$存在$\Leftrightarrow \min U_T(S)$存在，且此时$\sup S = \min U_T(S)$

pf："$\Rightarrow$"：

设$\sup S$存在，由定义立即知$\sup S$是S的一个上界，即：$\sup S \in U_T(S)$

设$y < \sup S$，取$\epsilon = \sup S - y$，则$\exists x \in S$，$s.t. y = \sup S - \epsilon < x$，故$y \notin U_T(S)$

因此$\forall a \in U_T(S)$，有$a \geq \sup S$

可见$\sup S$满足$\min U_T(S)$的定义，故$\min U_T(S)$存在，且等于$\sup S$

"$\Leftarrow$"：

设$\min U_T(S)$存在，由$\min U_T(S) \in U_T(S)$，可知$\forall x \in S$，$\min U_T(S) \geq x$

对于$\forall \epsilon > 0$，必定成立：$\exists x \in S : x > minU_T(S) - \epsilon$

(否则，$minU_T(S) - \epsilon$也是S的一个上界，且比$\min U_T(S)$小，这与$\min U_T(S)$是S的上界集的最小值矛盾)

可见$\min U_T(S)$满足$\sup S$的定义，故$\sup S$存在，且等于$\min U_T(S)$ qed.

3.

> 思考：
>
> $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f(n)$是否一定成立？在什么条件下会成立？（可以考虑$f$有我们需要的单调性）
>
> 具体精细的证明是严格按照定义：用$\epsilon-N$语言和$\epsilon-\delta$语言反复书写，但有时我们默认了这些的成立
>
> 这样便可以回答为什么$\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})^n\overset{def}{=}e$

例 3.1.13 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}.$

证 先证$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$.首先，对于任意$x\geqslant 1$，有

$$\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]}<\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1},$$

其中$[x]$表示x的整数部分.当$x\to+\infty$时，不等式左、右两侧表现为两个数列极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n=\mathrm{e}\text{ 与 }\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\mathrm{e}.$$

利用函数极限的夹逼性，得到

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}.$$

再证$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$.为此令$y=-x$，于是当$x\to-\infty$时，$y\to+\infty$，从而有

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{y\to+\infty}\left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y}=\lim_{y\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}\cdot\left(1+\frac{1}{y-1}\right)\right]=\mathrm{e}.$$

4.

> Prob：梳理子列收敛性和母数列收敛性的关系

1. 母数列收敛则子数列必收敛，它的逆否命题可以判断一个数列发散
2. 两个子列收敛于不同极限值，则母数列发散
3. 有界不收敛数列至少存在两个子列收敛于不同极限（这个结论并不显然，可尝试证明）
4. 所有子数列都收敛⇒母数列收敛，因为：平凡地，母数列是它本身的一个子列
5. 奇序数子列和偶序数子列收敛于同一极限，则母数列收敛

   对于5.，更一般的推广是：

   > 若存在**有限个**子列构成母数列的划分（不重不漏），且这些子列收敛于同一极限，则母数列收敛
   >
   > 可思考：为什么把"有限个子列"改成"无限个子列"，命题不成立

$\boxed{\text{Define}}$：映射的复合.

设 $f: A\to B$, $g: B\to C$. 则可定义复合 $g\circ f: A\to C$.

$(g\circ f)(x) \equiv g(f(x))$, $\forall x\in A$. 注：g有时没有完全用上.

$\boxed{\text{Prop}}$：映射的复合运算成立结合律.

设 $h: X\to Y$. $g: Y\to Z$. $f: Z\to W$. $\forall x\in X$

则有 $[f\circ(g\circ h)](x) = f[(g\circ h)(x)] = f[g(h(x))]$

$= (f\circ g)(h(x)) = [(f\circ g)\circ h](x)$.

这样：$f\circ g\circ h$ 多元复合有通常的意义.

$\boxed{\text{Define}}$：可逆映射.

称映射 $f: X\to Y$ 是可逆的，若存在映射 $g: Y\to X$，

满足：$f\circ g = I_Y$ 且 $g\circ f = I_X$，这里 I_X 表集合 X 上的恒等映射.

称 g 为 f 的逆映射. 可知 g 也是可逆的，f 是 g 的逆映射.

$\boxed{\text{Define}}$ 单性、满性.：设 $f: S\to T$.

单射：injection，$1\to 1$（一对一的）：$f(x)=f(y) \Rightarrow x=y$.

满射：surjection，到上.：$\forall z\in T$，$\exists\, x\in S$ s.t. $f(x)=z$ (i.e. range $f = T$)

双射：bijection，一一对应 (one-one correspondence). 即又单又满.

$\boxed{\text{Prop}}$ 逆映射的表示，可逆性 $\Leftrightarrow$ 单性+满性

Pf：先证 可逆 $\Rightarrow$ 单+满.

设 $f: V\to W$ 是可逆的. 设 $u, v\in V$ 且 $f(u)=f(v)$

(单) 则：$u = I_V(u) = (f^{-1}\circ f)(u) = f^{-1}(f(u)) = f^{-1}(f(v)) = (f^{-1}\circ f)(v) = I_V(v) = v$

(满) 设 $w\in W$，则 $w = I_W(w) = (f\circ f^{-1})(w) = f(f^{-1}(w))$，$f^{-1}(w)\in V$.

再证 单+满 $\Rightarrow$ 可逆.，设 f 既单又满.

则对 $\forall\, w\in W$，$\exists!$（存在唯一）$v\in V$ s.t. $f(v)=w$.

于是可以定义 $g: W\to V$，$g(w)\equiv v$，立即有 $(f\circ g)(w) = f(g(w)) = f(v) = w$.

故 $f\circ g = I_W$；设 $v\in V$. 则 $f[(g\circ f)(v)] = (f\circ g)[f(v)] = I_W(f(v)) = f(v)$

由于 f 是单的，故 $(g\circ f)(v) = v$，则 $g\circ f = I_V$. qed. (注，这里 $g = f^{-1}$)

Prop 单射与单射复合仍单；满射与满射复合仍是满射.

Pf：设 $f: U \to V$，$g: V \to W$. 注意，只有都用 V 衔接才能作复合.

有 $g \circ f: U \to W$.

1) 设 f, g 都是单射. 设 $(g\circ f)(x) = (g\circ f)(y)$，$x, y \in U$

则 $g(f(x)) = (g\circ f)(x) = (g\circ f)(y) = g(f(y))$

由 g 是 1-1 的. 则 $f(x) = f(y)$，再由 f 是 1-1 的. 则 $x = y$.

2) 设 f, g 都是满射，设 $w \in W$.

由 g 是到上的. 则 $\exists\, v \in V$ s.t. $g(v) = w$.

再由 f 是到上的. 则 $\exists\, u \in U$ s.t. $f(u) = v$

故 $w = g(v) = g(f(u)) = (g\circ f)(u)$. qed.

Corollary：双射与双射的复合仍是双射.

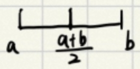
6.致密性定理的证明

Thm：有界数列必有收敛子列.

Pf：设数列 $\{x_n\}$ 有界：$a < x_n < b$.

① 由二分方法构造闭区间套. 这个闭区间套里含有所needed子列的雏形

必存在二分区间：含有该数列 $\{x_n\}$ 中的无穷多项.



（否则：原数列仅有有限项）

记第一个二分区间为 $[a_1, b_1]$

依此类推：可以构造一列二分区间 $[a_n, b_n]$：每个区间都含 $\{x_n\}$ 中的无穷多项.

且 $\{[a_n, b_n]\}$ 满足闭区间套条件：

故：$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \xi$

② 明确地把该收敛子列构造出来.

必然可以取出 $\{x_n\}$ 中的元：x_{n_2} 在区间 $[a_2, b_2]$ 中. 满足：$n_1 < n_2$

（否则：在区间 $[a_2, b_2]$ 中取出的任意一个 $\{x_n\}$ 中的元 x_{n_2}

都成立：$n_2 \le n_1$，即 $n_2 \in \{1, 2, 3, \dots, n_1\}$

那么数列 $\{x_n\}$ 落在区间 $[a_2, b_2]$ 中的元素至多仅有：$\boxed{x_1, x_2, \dots, x_{n_1}}$ 这有限个（n_1 个）.

与①所构造二分区间的性质矛盾！）

依此类推：可以得到一列数 $x_{n_k} \in \{x_n\}$，满足：$\begin{cases} x_{n_k} \in [a_k, b_k], & \forall k \\ n_k < n_{k+1}, & \forall k \end{cases}$

即 $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ 是 $\{x_n\}$ 的子列

而根据：$a_k \le x_{n_k} \le b_k$

以及 $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = \lim\limits_{k\to\infty} b_k = \xi$

由迫敛性知该子列 $\{x_{n_k}\}$ 确实收敛！