# 函数的连续性：第一次小测复习

# 1 函数极限

## 1.1 函数极限的定义

函数极限的定义会比数列极限的定义更加复杂一些，因为它的定义域（可能）是 $\mathbb{R}$，所以会出现这些情况：

$$\lim_{x\to x_0} f(x), \lim_{x\to +\infty} f(x), \lim_{x\to -\infty} f(x), \lim_{x\to \infty} f(x)$$

这里写出 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 的定义，大家可以自己补上其他的定义。

> **定义**：设函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 的某个去心邻域内有定义，如果对于任意给定的 $\varepsilon > 0$，总存在一个 $\delta > 0$，使得当 $|x - x_0| < \delta$ 时，$f(x)$ 满足 $|f(x) - A| < \varepsilon$，那么就称函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 处的极限为 $A$，记作 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$。

特别地，还有左极限和右极限的定义：

注意第四个极限的定义，这是一个常见的坑点，我们得同时考虑 $x$ 趋向正无穷和负无穷的情况。

> **定义**：设函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 的左邻域内有定义，如果对于任意给定的 $\varepsilon > 0$，总存在一个 $\delta > 0$，使得当 $0 < x - x_0 < \delta$ 时，$f(x)$ 满足 $|f(x) - A| < \varepsilon$，那么就称函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 处的左极限为 $A$，记作 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = A$。

## 1.2 函数极限定义的相关证明

这一块不是重点，随便看看课本上的例题就可以，我只放一个简单的题目。

> **例题 1.1：** 证明：$\lim\limits_{x\to x_0} \sin x_0 = \sin x_0$。

> Hint.
> 三角函数证明**最重要**的一个小技巧是什么？

## 1.3 函数极限的性质

和数列极限类似的：唯一性、局部有界性、局部保号性、保不等式性、夹逼性（迫敛性）、四则运算法则、单调有界定理、柯西收敛准则，这里就不再赘述。

> **Heine 定理**：设函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 的某个去心邻域内有定义，那么 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 的充分必要条件是：对于任意收敛于 $x_0$ 的数列 $\{x_n\}$，$x_n\neq x_0$，有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$。

定理的证明是一个经典的套路。

> Hint.
> 怎么理解 $\neq x_0$?
> $A$ 可以是无穷吗?
> $x_0$ 可以是无穷吗?
> 可以改成左右极限的形式吗?

> **推论**：设函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 的某个去心邻域内有定义，那么 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在的充分必要条件是：对于任意收敛于 $x_0$ 的数列 $\{x_n\}$，$x_n\neq x_0$，有 $f(x_n)$ 收敛。

> Hint.
> 这样的推论有什么用?

> **例题 1.2：** 证明：$\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x^2}$ 不存在。

> **例题 1.3:** 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上严格单调有界，$\{x_n\}$ 为实数列，则下列陈述中错误的是：
> A.若 $\{x_n\}$ 发散，则 $\{f(x_n)\}$ 必发散
> B.若 $\{x_n\}$ 单调，则 $\{f(x_n)\}$ 必收敛

> C.若 $\{f(x_n)\}$ 发散，则 $\{x_n\}$ 必发散
> D.若 $\{f(x_n)\}$ 单调，则 $\{x_n\}$ 必收敛。

> Hint.
> 如果你没想到反例，可以思考一下自己漏掉了什么经典模型。

## 1.4 重要极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

## 1.5 无穷小量、无穷大量

请写出有界量、无穷小量和无穷大量的定义：

> **定义**：若 $f,g$ 为 $x\to x_0$ 时的无穷小量：
>
> - $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=0$，则称 $f$ 是关于 $g$ 的高阶无穷小量，记作 $f(x)=o(g(x))$。
> - $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=A\neq 0$，则称 $f$ 是关于 $g$ 的同阶无穷小量。
> - $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty$，则称 $f$ 是关于 $g$ 的高阶无穷大量。
> - 特别地，$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=1$，则称 $f$ 是关于 $g$ 的等价无穷小量，记作 $f(x)\sim g(x)$。

举个例子：

$$x\sim\sin x\sim\tan x\sim\ln(1+x)\sim e^x-1\sim\arcsin x\sim\arctan x\ (x\to 0)$$

$$(1+x)^\alpha\sim 1+\alpha x\ (x\to 0)$$

变式：$\forall k\in\mathbb{R},\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{k}{n}\right)^n=$

> **定理**：若 $f(x)\sim g(x)\ (x\to x_0)$，则：
>
> - 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)h(x)=A$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)h(x)=A$；

> - 若 $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{h(x)}{f(x)} = A$，则 $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{h(x)}{g(x)} = A$。

无穷小量的加减法有不确定性，比如课本经典的例题：

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x - x}{x^3} = 0?$$

思考一下，如何避免这种情况发生呢？

> **例题 1.4**：设 $x \to x_0$ 时，$f(x)$ 是无穷小量，$g(x)$ 无穷大量，$h(x)$ 是有界量，下列说法正确的是：
> A. $x \to x_0$ 时，$g(x) + h(x)$ 是无穷大量；
> B. $x \to x_0$ 时，$f(x) + h(x)$ 是无穷小量；
> C. $x \to x_0$ 时，$f(x)h(x)$ 是无穷小量；
> D. $x \to x_0$ 时，$g(x)h(x)$ 是无穷大量。

> **例题 1.5**：设 $\alpha(x) = \dfrac{8-x}{4+x}, \beta(x) = 2 - \sqrt[3]{x}$，当 $x \to 8$ 时，下列陈述正确的是：
> A. $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 为同阶非等价无穷小量；
> B. $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 为等价无穷小量；
> C. $\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ 更高阶的无穷小量；
> D. $\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ 更低阶的无穷小量。

> **例题 1.6**：设 $f(x)$ 在 $x = 2$ 处连续，且 $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x)}{x-2} = 2$，求 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(e^{x^2} + \cos 2x)}{\ln(1+x^2)}$。

> **例题 1.7**：判断下列说法的正确性：
>
> - $o(x^2)+o(x^3)=o(x)\ (x\to 0)$；
> - $o(x)\cdot o(x)=o(x^2)\ (x\to 0)$；
> - $\frac{o(x^2)}{o(x)}=o(x)\ (x\to 0)$；

# 2 函数连续性

## 2.1 函数连续性的定义

> **定义**：设函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 的某个邻域内有定义，如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$，那么就称函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 处连续。

同样的，也有左连续和右连续的定义，请自行补全。

> **间断点**：若函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处不连续，那么称 $x_0$ 为 $f(x)$ 的间断点/不连续点。
> **可去间断点**：$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 存在，但 $f(x_0)$ 无定义，或者 $f(x_0)\neq A$。
> **跳跃间断点**：$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)\neq \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$。
> **第一类间断点**：可去间断点和跳跃间断点的统称。
> **第二类间断点**：至少有一侧的极限不存在。

> **定义**：若函数 $f(x)$ 在区间 $I$ 上连续，则称 $f(x)$ 是在 $I$ 上的连续函数。

> **定义**：狄利克雷函数 $f(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q}\\ 0, & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$。

这是一个**极限处处不存在**的函数，所以每一个点都是__________。

> **定义**：黎曼函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{n}, & x=\dfrac{m}{n},(m,n)=1,n>0\\ 0, & x=0,1 \text{ or } x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$。

这是一个**极限处处存在**的函数，每一点的极限都是________，所以每一个有理点都是_________，每一个无理点都是_________。

> **例题 2.1**：考察函数 $f(x)=x(x-\sqrt{2})(x-2)D(x)$ 的连续性，其中 $D(x)$ 是狄利克雷函数。

> **例题 2.2**：证明或证伪：设函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=f(x^2)$，且 $f(x)$ 在 $x=0$ 和 $x=1$ 处连续，则 $f(x)$ 为常值函数。

## 2.2 函数连续性的性质

同样地，连续函数也满足四则运算、局部保号、有界等性质。还有一个很重要的性质就是连续函数的复合性质：

> **定理**：若函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处连续，函数 $g(y)$ 在点 $y_0=f(x_0)$ 处连续，则复合函数 $g(f(x))$ 在点 $x_0$ 处连续。

有了这些定理（这里省略反函数的连续性定理），我们就可以证明初等函数（由常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数经过有限次四则运算及复合运算所产生的函数）的连续性了。

> **定理**：一切初等函数在其定义区间上连续。

这样再后续的极限计算中，我们就可以很放心地直接把一些 $\lim$ 给去掉了。

## 2.3 闭区间上连续函数

这一块对证明的要求会高一些，如果只是准备小测，可以先不看证明。

这些定理的可以用这样一个顺畅的逻辑去记忆：

> **定理**：若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，那么 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界。

先证明有界，然后再证明最值可以取到。

> **定理**：若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，那么 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可以取到最大值和最小值，即存在 $c,d\in[a,b]$，使得 $f(c)\geq f(x),\forall x\in[a,b]$，$f(d)\leq f(x),\forall x\in[a,b]$。

接下来是更强的结论，每个中间值都能取到：

> **定理**：若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，最大值和最小值分别为 $M$ 和 $m$，那么对于任意 $y\in[m,M]$，都 $\exists c\in[a,b]$，使得 $f(c)=y$。

常见的推论就是零点定理：

> **定理**：若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)f(b)<0$，那么 $\exists c\in(a,b)$，使得 $f(c)=0$。

> **例题 2.3**：证明或证伪：如果 $x_0$ 是**连续函数** $f$ 在 $(a,b)$ 内唯一极值点，则其是 $f$ 在 $[a,b]$ 上的最值点。

> **例题 2.4**：证明或证伪：如果函数 $f$ 在 $(a,b)$ 上连续且有界，则 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$ 都存在。

> Hint.
> 积累这个重要模型，后面学到导数后还能派上用场。

闭区间连续函数还有一个很强的结论，在此之前我们先介绍一个概念：

## 2.4 一致连续性【小测不考】

一致连续是一个比连续性更强的性质，它的定义是这样的：

> **定义**：若函数 $f(x)$ 在区间 $I$ 上连续，对于任意 $\varepsilon > 0$，都存在一个 $\delta > 0$，使得 $\forall x_1, x_2 \in I$，只要 $|x_1 - x_2| < \delta$，就有 $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$，那么就称函数 $f(x)$ 在 $I$ 上一致连续。

> Hint.
> 理解一致连续的关键就是，他比连续性强在哪里？

直接放出这个最强的结论：

> **cantor 定理**：若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，那么 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续。

一致连续的性质非常重要，他为很多闭区间上函数性质的证明提供了比连续性更强的条件。在后续黎曼可积的证明以及数分 2 的学习中，你会再次感受到这点。

和连续性一样，如何判断一函数在某个区间上不一致连续呢？和函数连续的判断一样，这里给出一个定理：

> **定理**：函数 $f(x)$ 在区间 $I$ 上一致连续的充分必要条件是：$\forall \{x_n\}, \{y_n\} \subset I$，只要 $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n - y_n) = 0$，就有 $\lim\limits_{n\to\infty} (f(x_n) - f(y_n)) = 0$。

> **定理**：函数 $f(x)$ 在**有限**区间 $I$ 上一致连续的充分必要条件是：$\forall \{x_n\} \subset I$，若 $\{x_n\}$ 是柯西列，则 $\{f(x_n)\}$ 也是柯西列。

> **例题 2.5**：删除掉**有限**这个条件，这个定理还成立吗？

最后一个大杀招，开区间连续函数什么时候才能成为一致连续函数呢？

> **定理**：若函数 $f(x)$ 在开区间 $(a,b)$ 上连续，那么 $f(x)$ 在 $(a,b)$ 上一致连续的充分必要条件是：$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$、$\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ 都存在。

> **例题 2.6**：判断下列函数在给定区间上是否一致连续：
>
> - $f(x) = x^2$ 在 $[0, +\infty)$ 上；
> - $f(x) = \sqrt{x}$ 在 $[0, +\infty)$ 上；
> - $f(x) = \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上；
> - $f(x) = \sin x^2$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上。
> - $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 上。
> - $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 上。

这种例子有很多，大家可以把课本习题中判断的例子都刷一遍。

> **例题 2.7**：证明 $f(x) = x^a \sin x (a > 0)$ 在 $(0, +\infty)$ 上不一致连续。

> **例题 2.8**：证明 $f(x) = x^a \sin x (a < -1)$ 在 $(0, +\infty)$ 上不一致连续。

> **定理**：若函数 $f(x)$ 在区间 $I$ 满足 Lipschitz 条件，即 $\exists L > 0$，使得 $\forall x_1, x_2 \in I$，都有 $|f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|$，那么 $f(x)$ 在 $I$ 上一致连续。

> Hint.
> 这是充分必要条件吗?

> **例题 2.9**：若 $f(x)$ 在 $[A, +\infty)$ 上连续，$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ 存在，则 $f(x)$ 在 $[A, +\infty)$ 上一致连续。

# 3 杂题选讲

由于周六的时候潘学长已经讲过数列了，所以我这边只放一部分题目作为参考。

> **例题 3.1**：下列说法正确的是：
> A. 若数列 $\{a_n\}$ 收敛，$\{b_n\}$ 发散，则 $\{a_n + b_n\}$ 必发散。
> B. 若数列 $\{a_n\}$ 收敛，$\{b_n\}$ 发散，则 $\{a_n b_n\}$ 必发散。

> C. 若正项数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 均发散，则 $\{a_nb_n\}$ 必发散。
> D. 若数列 $\{a_n\}$ 满足 $\lim\limits_{x\to+\infty}|a_{n+1}-a_n|=0$，则数列 $\{a_n\}$ 必收敛。

> **例题 3.2**：下列说法正确的是：
> A. 若数列 $\{x_n\}$ 无界，则一定存在一个它的单调子列 $\{x_{n_k}\}$，使得 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=\infty$。
> B. 若数列 $\{x_{2n}\}$ 和 $\{x_{2n+1}\}$ 均收敛，则 $\{x_n\}$ 也收敛。
> B. 若数列 $\{x_{2n}\}$ 和 $\{x_{2n+1}\}$、$\{x_{3n}\}$ 均收敛，则 $\{x_n\}$ 也收敛。
> D. 若数列 $\{x_n\}$ 每一个子列都收敛，则 $\{x_n\}$ 也收敛。

> **例题 3.3**：$a_1,a_2,\cdots,a_m$ 是 $m$ 个正数，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}$。

> **例题 3.4**：求
>
> $$\lim_{n\to\infty}\frac{1!+2!+\cdots+n!}{n!}$$
>
> 和
>
> $$\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot1!+2\cdot2!+\cdots+n\cdot n!}{(n+1)!}$$

> **例题 3.5**：求
>
> $$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\ln(1+2^{2022}+3^{2022}+\cdots+n^{2022})}$$

> **例题 3.6**：求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$。

# 4 习题

- 当 $x\to 1$ 时，$\alpha(x)=\cos\dfrac{\pi}{2}x$ 与$\beta(x)=A(x-1)^n$ 为等价无穷小量，求 $A$ 和 $n$ 的值。

- 求 $\lim\limits_{n\to\infty} n^2(\sin\frac{\pi}{n}-\sin\frac{\pi}{n+1})$

- 求 $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{9x^2+6x+8}-(ax+b))=1$，求 $a,b$ 的值。

- 设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上一致连续，$g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-g(x)]=0$。证明：$g(x)$ 也在 $[0,+\infty)$ 上一致连续。

- 设 $f:[0,1]\to[0,1]$ 是连续函数，$f(0)=0, f(1)=1$，并且 $\forall x\in[0,1]$，有 $f(f(x))=x$。证明 $f$ 在 $[0,1]$ 上 **严格**单调递增，并由此进一步证明，$\forall x\in[0,1]$，有 $f(x)=x$。